现代数学译丛

动力系统几何理论引论

现代数学译丛

动力系统几何理论引论

〔巴西〕J. 帕利斯　W. 梅罗 著

陈藻平　董镇喜　金成桴 译

科学出版社

1988

内 容 简 介

动力系统几何理论是近代数学的一个活跃分支．本书阐述动力系统的结构稳定性和通有性理论的一些基本概念与重要定理．全书共分四章．第一章介绍微分流形与向量场，第二章论述局部稳定性，第三章论述 Kupka-Smale 定理，第四章讨论 Morse-Smale 向量场的通有性与结构稳定性．本书叙述深入浅出．书中有大量的例题与习题．

本书可供大专院校数学系高年级学生、研究生、教师及有关的科学工作者阅读．

Jacob Palis, Jr. Welington de Melo

Geometric Theory of Dynamical Systems

An Introduction

Springer-Verlag, 1982

现代数学译丛

动力系统几何理论引论

〔巴西〕J. 帕利斯 W. 梅罗 著

陈藻平 董镇喜 金成桴 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1988 年 4 月第一次印刷 印张：7 5/8

印数：0001－2,750 字数：195,000

ISBN 7-03-000016-1/O·3

定价：3.20 元

序 言

……(微分方程)定性理论的研究本身也具有头等意义……

Henri Poincaré, 1881.

本书对动力系统几何理论作一概述，它是引论性的，但也使读者对结构稳定性和通有性这两个重要论题中的若干基本概念有一了解.

从 Poincaré, Liapunov 和 Birkhoff 开始，很多数学家已经研究了这一理论．在最近一些年，它的某些一般目标已经确立，并且得到了相当大的发展.

Andronov 和 Pontryagin (1937) 引进了结构稳定的基本概念，Peixoto 在一些论文 (1958—1962) 中证明了在二维曲面上结构稳定的向量场的稠密性，这两个重大事件相隔长达二十余年．接着，Smale 把研究通有性与稳定性作为主要目标，并且在这方面得到了不少结果，以及提出在这一领域中至关紧要的一些问题，从而大大地丰富了这个理论．在同一时期，Hartman 与 Grobman 证明了局部稳定性是一个通有的性质．此后不久，Kupka 和 Smale 就周期轨道成功地解决了这个问题.

我们打算通过大量的例子，以及系统证明 Hartman-Grobman 定理和稳定流形定理(第二章)，Kupka-Smale 定理 (第三章) 和 Peixoto 定理(第四章)，向读者介绍这一理论的精华．我们给出的若干定理的证明比原始的简单，且便于作重要的推广．在第四章我们还讨论有无限个周期轨道的稳定微分同胚的基本例子．我们叙述动力系统的结构稳定性的一般结果，且对其它一些论题，如分歧理论，作一些简短的说明．在第四章的附录中，我们介绍旋转数

这一重要概念，且用它来描述由Cherry得出的一个流的漂亮的例子.

阅读本书只需要微分方程和微分流形理论的基本知识，后者中与本书有关的一些结果在第一章作一概述. 在第二章，只需要有关线性代数及Banach空间的隐函数定理和压缩映射定理的知识. 第三章的内容远不是初等的，但无疑不是最难的. 此处我们系统地运用匀断相交定理. 形式上第四章依赖第三章，因为我们对二维曲面这个较初等的特殊情形利用了Kupka-Smale定理.

由书中证明的几个定理引出了很多有关的结果和不同的研究方向. 本书的最后一部分对这些结果作了简短的(但并非完备的)介绍. 我们期望本书能使读者对这个理论有一初步的了解，从而能够较顺利地研究有关的文献.

J. 帕利斯

W. 梅罗

1981年9月于里约热内卢

符 号 表

$\mathbb{R}$ 实直线

$\mathbb{R}^n$ Euclid n 空间

$\mathbb{C}^n$ 复 n 空间

C^n 有 n 阶连续导数的可微映射类

C^∞ 无限次可微

C^ω 实解析

$df(p)$, df_p 或 $Df(p)$ f 在 p 点的导数

$(\partial/\partial t)f$, $\partial f/\partial t$ 偏导数

$D_2f(x, y)$ 对第二个变量的偏导数

$d^nf(p)$ f 在 p 点的 n 次导数

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 线性映射空间

$L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ r 线性映射空间

$\|\ \|$ 范数

$g\circ f$ 映射 g 和 f 的合成

$\varnothing$ 空集

$f|M$ 映射 f 在子集 M 上的限制

$\bar{U}$ 集合 U 的闭包

TM_p M 在 p 点的切空间

TM M 的切丛

$\mathscr{X}^r(M)$ M 上所有 C^r 向量场组成的空间

f_*X 由 X 导出的在 f 的值域上的向量场

X_t 由 X 的流导出的在时间 t 的微分同胚

$\mathscr{O}(p)$ p 的轨道

$\omega(p)$ p 的 ω 极限集

$\alpha(p)$ p 的 α 极限集

S^n　单位 n 维球面

T^2　二维环面

$\operatorname{grad} f$　f 的梯度场

$\int f$　f 的积分

id_M　M 的恒等映射

$\langle, \rangle$　Riemann 度量

$\langle, \rangle_p$　由 Riemann 度量定义的在 p 点的切空间的内积

$C^r(M, N)$　C^r 映射空间

$\| \|_r$　C^r 范数

$\operatorname{Diff}^r(M)$　C^r 微分同胚空间

$f \pitchfork S$　f 与 S 匀断相交

$\mathcal{O}_X(p)$　X 过 p 点的轨道

$\mathcal{O}_+(p)$　p 的正轨道

$\alpha'(t)$　线段上的映射在 t 的导数

T^n　n 维环面

$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子空间

$\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$　$\mathbb{C}^n$ 上的线性算子复向量空间

L^k　$L \circ L \circ \cdots \circ L$

$\operatorname{Exp}(L), e^L$　L 的指数

$GL(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 的可逆线性算子群

$H(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 的双曲线性同构空间

$\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$　$\mathbb{R}^n$ 的双曲线性向量场空间

$\operatorname{Sp}(L)$　L 的谱

$\mathscr{G}_0$　所有奇点为简单的向量场空间

$\det(A)$　A 的行列式

$\mathscr{G}_1$　所有奇点为双曲的向量场空间

G_0　所有不动点为初等的微分同胚空间

G_1　所有不动点为双曲的微分同胚空间

$C_b^0(\mathbb{R}^m)$　从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的连续有界映射空间

$\dim(M)$　M 的维数

$W^s(p)$　p 的稳定流形

$W^u(p)$　p 的不稳定流形

$W^s_\beta(p)$　大小为 β 的局部稳定流形

$W^u_\beta(p)$　大小为 β 的局部不稳定流形

$W^s_{loc}(0)$　局部稳定流形

$W^u_{loc}(0)$　局部不稳定流形

$\mathscr{G}_{12}$　属于 $\mathscr{G}_1$ 的，其闭轨道都是双曲的所有向量场组成的空间

$\mathscr{X}(T)$　属于 $\mathscr{G}_1$ 的，周期 $\leqslant T$ 的闭轨道都是双曲的所有向量场组成的空间

$L_\alpha(X)$　X 的轨道的 α 极限集之并

$L_\omega(X)$　X 的轨道的 ω 极限集之并

$\Omega(X)$　X 的非游荡点的集合

M–S　Morse–Smale 向量场的集合

∂M　M 的边界

$\operatorname{int} A$　集合 A 的内域

目　录

第一章　微分流形与向量场

本章建立的一些概念和基本事实对于理解以后各章是必需的.

我们首先介绍$\mathbb{R}^n$中的微积分，常微分方程，以及$\mathbb{R}^n$中的子流形的一些经典结果；然后定义流形上的向量场，并将$\mathbb{R}^n$中的常微分方程理论的一些局部性结果应用到这种向量场. 我们用α极限集和ω极限集的概念来介绍向量场的定性研究，并证明重要的Poincaré–Bendixson 定理.

第二节，我们在流形间的可微映射集合上定义C^r拓扑. 证明具有C^r拓扑的C^r映射集合是一可分的 Baire 空间，C^∞映射集合在该空间中稠密. 由此，我们得到向量场空间和微分同胚空间的具有相同的性质的拓扑.

第三节专门介绍今后经常要用到的匀断相交定理.

我们以确立动力系统的几何理论或定性理论的一般目的来结束本章. 特别地，讨论定义在$\mathbb{R}^n$的子流形上的微分方程的拓扑等价和结构稳定性概念.

§0.　$\mathbb{R}^n$中的微积分与微分流形

这一节我们将叙述$\mathbb{R}^n$中的微积分，微分方程以及微分流形的某些概念和基本结果. 其中有关$\mathbb{R}^n$中的微积分所列举的事实的证明可以在[46]，[48]中找到，关于微分方程的可参看非常可取的初等教程 [4]，[41]，[116]，或较高级教程 [33]，[35]，也可参看[47]；关于微分流形的可参看 [29]，[38]，[49].

设f: $U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$是定义在$\mathbb{R}^m$的开子集$U$上的一个映射. 我们说$f$在$U$中的一点$p$处<u>可微</u>，如果存在一个线性变换$T$: $\mathbb{R}^m$

$\to \mathbb{R}^k$, 使得对小的 v, $f(p+v)=f(p)+T(v)+R(v)$, 满足

$$\lim_{v\to 0} R(v)/\|v\|=0.$$

称线性映射 T 为 f 在 p 点的导数, 记作 $df(p)$, 有时也记作 df_p 或 $Df(p)$. 特别地, 由 f 在 p 点导数的存在可得出 f 在 p 点连续. 如果 f 在 U 中的每一点可微, 则得一映射 $df: U\to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, 对 U 中每一点 p, 它对应于 f 在 p 点的导数. 其中 $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ 表示由 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的线性映射的向量空间, 其范数为 $\|T\|=\sup\{\|Tv\|: \|v\|=1\}$. 如果 df 在 U 中连续, 则说 f 在 U 中是 C^1 类的. 众所周知, f 是 C^1 类的当且仅当 f 的各坐标函数的偏导数 $\partial f^i/\partial x_j: U\to\mathbb{R}$ 都存在且连续. $df(p)$ 关于 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^k$ 的标准基底的矩阵是 $[(\partial f^i/\partial x_j)(p)]$. 类似地, 我们用 df 在 p 点的导数定义 $d^2f(p)$. 这样, $d^2f(p)$ 属于空间 $L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k))$, 后者与 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的双线性映射空间 $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 同构. 根据这个同构, 在 $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ 上诱导出范数

$$\|B\|=\sup\{\|B(u, v)\|; \|u\|=\|v\|=1\}.$$

我们说 f 在 U 中是 C^2 类的, 如果 $d^2f: U\to L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 连续. 我们可归纳地定义 $d^rf(p)$ 为 $d^{r-1}f$ 在 p 的导数. 于是有 $d^rf(p)\in L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$, 其中 $L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 是范数为

$$\|C\|=\sup\{\|C(v_1, \cdots, v_r)\|; \|v_1\|=\cdots=\|v_r\|=1\}$$

的 r 线性映射空间. 从而, 如果 $d^rf: U\to L^r(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ 连续, 我们就说 f 在 U 中是 C^r 类的. 最后, 如果对一切 $r\geqslant 0$, f 是 C^r 类的, 我们就说 f 在 U 中是 C^∞ 类的. 注意, f 是 C^r 类的当且仅当 f 的各坐标函数的所有直到 r 阶的偏导数都存在且连续. 设 U, V 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f: U\to V$ 是一个 C^r 满射. 如果存在 C^r 映射 $g: V\to U$, 使得 $g\circ f$ 是 U 上的恒等映射, 我们就说 f 是一个 C^r 微分同胚.

0.0 命题. 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 是一开集, $f_n: U\to\mathbb{R}^k$ 是 C^1 类映射序列. 假如 f_n 逐点收敛于 $f: U\to\mathbb{R}^k$, 并且序列 df_n 一致收敛于 $g: U\to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, 则 f 是 C^1 类的, 并且 $df=g$. □

0.1 命题(链规则). 设 $U\subset\mathbb{R}^m$, $V\subset\mathbb{R}^n$ 是两个开集. 如果 $f: U\to\mathbb{R}^n$ 在 $p\in U$ 可微, $f(U)\subset V$ 且 $g: V\to\mathbb{R}^k$ 在 $q=f(p)$ 可微, 则 $g\circ f: U\to\mathbb{R}^k$ 在 p 可微, 且

$$d(g\circ f)(p)=dg(f(p))\circ df(p). \qquad \square$$

推论 1. 如果 f 和 g 都是 C^r 类的, 则 $g\circ f$ 也是 C^r 类的. $\square$

推论 2. 如果 $f: U\to\mathbb{R}^k$ 在 $p\in U$ 可微, $\alpha: (-1, 1)\to U$ 是满足 $\alpha(0)=p$ 及 $(d/dt)\alpha(0)=v$ 的一条曲线, 则 $f\circ\alpha$ 是一条在 0 可微且满足

$$(d/dt)(f\circ\alpha)(0)=df(p)v$$

的曲线. $\square$

0.2 定理(反函数定理). 设 $f: U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 映射, $r\geqslant1$. 如果 $df(p): \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是一同构, 则 f 在 $p\in U$ 是一个 C^r 局部微分同胚; 就是说, 存在 p 的邻域 $V\subset U$ 和 $f(p)$ 的邻域 $W\subset\mathbb{R}^m$, 以及 C^r 映射 $g: W\to V$, 使得 $g\circ f=I_V$ 且 $f\circ g=I_W$, 其中 I_V 表示 V 上的恒等映射, I_W 为 W 上的恒等映射. $\square$

0.3 定理(隐函数定理). 设 $U\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ 是一开集, $f: U\to\mathbb{R}^n$ 是一 C^r 映射, $r\geqslant1$. 令 $z_0=(x_0, y_0)\in U$, $c=f(z_0)$. 假设 f 关于它的第二个变量的偏导数 $D_2f(z_0): \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一同构, 则存在包含 x_0 的开集 $V\subset\mathbb{R}^m$ 与包含 z_0 的开集 $W\subset U$, 使得对每一 $x\in V$, 存在唯一的 $\xi(x)\in\mathbb{R}^n$, 使得 $(x, \xi(x))\in W$, 且 $f(x, \xi(x))=c$. 如此定义的映射 $\xi: V\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 类的, 且它的导数为

$$d\xi(x)=[D_2f(x, \xi(x))]^{-1}\circ D_1f(x, \xi(x)). \qquad \square$$

注. 这些定理对 Banach 空间也成立.

0.4 定理(浸入的局部形式). 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 是一开集, $f: U\to\mathbb{R}^{n+m}$ 是 C^r 映射, $r\geqslant1$. 假设对某点 $x_0\in U$, 导数 $df(x_0): \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m+n}$ 是一个单射. 则存在 x_0 的邻域 $V\subset U$, 原点的邻域 $W\subset\mathbb{R}^n$, $f(x_0)$ 的邻域 $Z\subset\mathbb{R}^{m+n}$, 以及 C^r 微分同胚 $h: Z\to V\times W$, 使得对一切 $x\in V$ 有 $h\circ f(x)=(x, 0)$. $\square$

0.5 定理(浸没的局部形式). 设 $U\subset\mathbb{R}^{m+n}$ 是一开集, $f: U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射, $r\geqslant1$. 假设对某点 $z_0\in U$, 导数 $df(z_0)$ 是一个满射. 则

存在z_0的邻域$Z\subset U$，$c=f(z_0)$的邻域$W\subset\mathbb{R}^n$，原点的邻域$V\subset\mathbb{R}^m$，以及C^r微分同胚$h: V\times W\to Z$，使得对一切$x\in V$及一切$w\in W$，有

$$f\circ h(x, w)=w. \qquad \square$$

设$f: U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$是一$C^r$映射，$r\geqslant 1$。如果$df(x)$是一个满射，则称点$x\in U$为$f$的正则点；反之，$x$称为临界点。如果每个$x\in f^{-1}(c)$都是正则点，则称$c\in\mathbb{R}^n$为正则值；反之，$c$就称为临界值。$\mathbb{R}^n$的一个子集称为剩余的，如果它包含可数个开稠子集的交。由Baire定理，$\mathbb{R}^n$的每个剩余子集都是稠密的。

0.6 定理(Sard[64])．如果$f: U\subset\mathbb{R}^n$是C^∞类的，则f的正则值集合是$\mathbb{R}^n$中的剩余集。 $\square$

我们应该指出，如果$f^{-1}(c)=\varnothing$，则c是一个正则值。为使正则点$x\in U$存在，必须有$m\geqslant n$。如果$m<n$，则U中所有的点都是临界点，因而$f(U)$在$\mathbb{R}^n$中是"贫乏"的，亦即$\mathbb{R}^n-f(U)$是剩余集。

现在我们来叙述有关微分方程的某些基本结果。开集$U\subset\mathbb{R}^m$上的向量场是一映射$X: U\to\mathbb{R}^m$。我们将只考虑C^r向量场，$r\geqslant 1$。X的过点$p\in U$的积分曲线是一满足$\alpha(0)=p$且对所有$t\in I$，$\alpha'(t)=X(\alpha(t))$的可微映射$\alpha: I\to U$，其中I是包含0的一个开区间。我们称α为微分方程$dx/dt=X(x)$的满足初值条件$X(0)=p$的一个解。

0.7 定理(存在唯一性定理)．设X为开集$U\subset\mathbb{R}^m$上的C^r向量场，$r\geqslant 1$，$p\in U$。则存在X的满足$\alpha(0)=p$的积分曲线$\alpha: I\to U$。如果$\beta: J\to U$是X的另一条满足$\beta(0)=p$的积分曲线，则对一切$t\in I\cap J$，$\alpha(t)=\beta(t)$。 $\square$

X在点$p\in U$的一个局部流是一映射$\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p\to U$，其中$V_p$是$p$在$U$中的一个邻域，使得对每一$q\in V_p$，由$\varphi_q(t)=\varphi(t, q)$定义的映射$\varphi_q: (-\varepsilon, \varepsilon)\to U$，是$X$通过$q$的一条积分曲线；亦即$\varphi(0, q)=q$，且对一切$(t, q)\in(-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p$，有

$$(\partial/\partial t)\varphi(t, q)=X(\varphi(t, q)).$$

0.8 定理. 设 X 是 U 中一 C^r 向量场, $r\geqslant 1$. 则对一切 $p\in U$, 存在一 C^r 局部流 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V_p\to U$, 且有

$$D_1D_2\varphi(t, q)=DX(\varphi(t, q))\cdot D_2\varphi(t, q),$$

$D_2\varphi(0, q)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的恒等映射, 其中 D_1, D_2 分别表示关于第一个和第二个变量的偏导数. □

我们还可以考虑依赖于参数的向量场以及它们的解对于参数的依赖性. 设 E 是一 Banach 空间, $F: E\times U\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 映射, $r\geqslant 1$. 对每一 $e\in E$, 由 $F_e(p)=F(e, p)$ 定义的映射 $F_e: U\to\mathbb{R}^m$ 是 U 上的一个 C^r 向量场. 下面的定理指出, 这个向量场 F_e 的解连续依赖于参数 $e\in E$.

0.9 定理. 对每一 $e\in E$ 及 $p\in U$, 存在 e 在 E 中的邻域 W, p 在 U 中的邻域 V, 以及 C^r 映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W\to U$, 使得对每一 $(t, q, \lambda)\in(-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W$, 有

$$\varphi(0, q, \lambda)=q,$$
$$D_1\varphi(t, q, \lambda)=F(\lambda, \varphi(t, q, \lambda)).$$ □

下面我们介绍微分流形的概念. 为了叙述简单起见, 我们将微分流形定义为 $\mathbb{R}^k$ 的子集. 在本节末我们再讨论它的抽象定义.

设 M 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^k$ 的一个子集. 我们将利用 M 上的诱导拓扑; 亦即 $A\subset M$ 是开的, 如果存在开集 $A'\subset\mathbb{R}^k$, 使得 $A=A'\cap M$. 我们说 $M\subset\mathbb{R}^k$ 是 m 维**微分流形**, 如果对每一点 $p\in M$, 存在 p 的邻域 $U\subset M$, 以及一同胚 $x: U\to U_0$, 其中 U_0 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集, 使得逆同胚 $x^{-1}: U_0\to U\subset\mathbb{R}^k$ 是一个 C^∞ 浸入. 亦即对每一点 $u\in U_0$, 导数 $dx^{-1}(u): \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ 是一个单射. 这时, 我们说 (x, U) 是围绕 p 的一个**局部卡**, U 是 p 的一个**坐标邻域**. 如果上述同胚 x^{-1} 都是 C^r 类的, 则说 M 是 C^r 微分流形. 我们所说的微分流形是指 C^∞ 微分流形. 由浸入的局部形式 0.4 得出: 如果 (x, U) 是围绕 $p\in M$ 的一个局部卡, 则在 $\mathbb{R}^k$ 中存在 p 的邻域 A, $x(p)$ 的邻域 V、$\mathbb{R}^{k-m}$ 中原点的邻域 W, 以及 C^∞ 微分同胚 $h: A\to V\times W$, 使得对一切 $q\in A\cap M$, 有 $h(q)=(x(q), 0)$. 特别地, 一个局部卡是 $\mathbb{R}^k$ 的一个开子集到 $\mathbb{R}^m$ 内的一个 C^∞ 映射的限制 (图

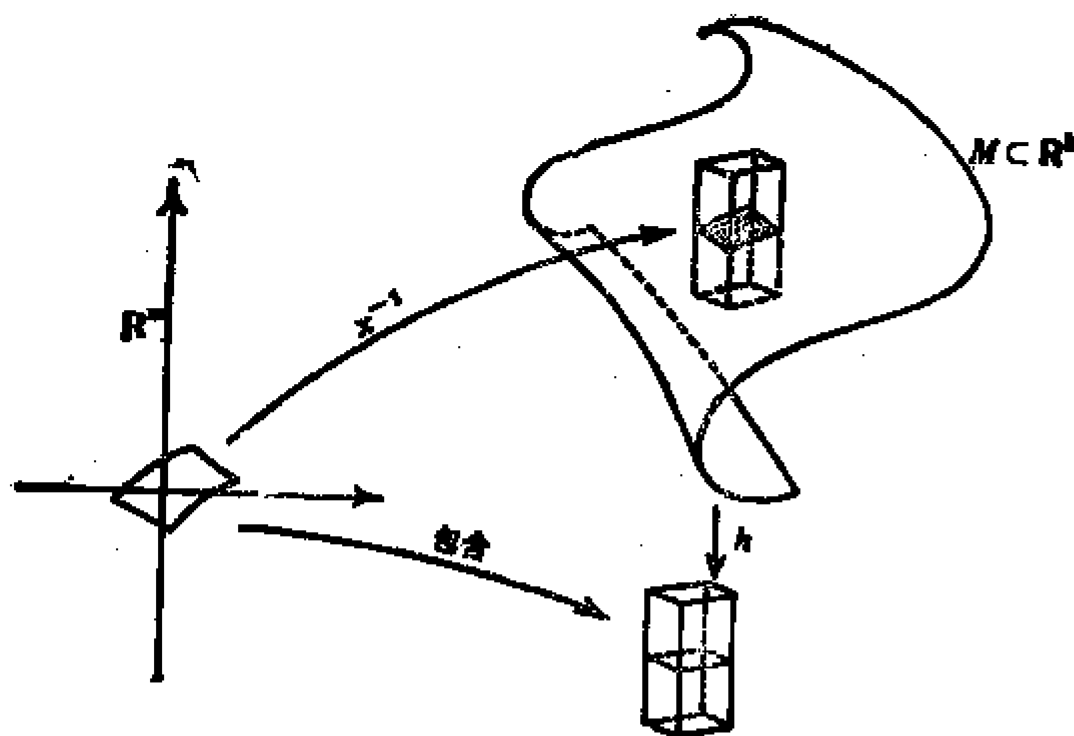


图 1

1). 由此说明,我们得到下面的命题.

0.10 命题. 设 $x: U\to\mathbb{R}^m$, $y: V\to\mathbb{R}^m$ 是 M 中的两个局部卡,若 $U\cap V\neq\varnothing$, 则坐标变换

$$y\circ x^{-1}: x(U\cap V)\to y(U\cap V)$$

是一 C^∞ 微分同胚(图 2). □

现在我们来定义流形之间的可微映射. 设 M^m 与 N^n 是流形[1], $f: M^m\to N^n$ 是一映射. 我们说 f 是 C^r 类的, 若对每一点 $p\in M$, 存在围绕 p 的局部卡 $x: U\to\mathbb{R}^m$, 以及满足 $f(U)\subset V$ 的 $y: V\to\mathbb{R}^n$, 使得 $y\circ f\circ x^{-1}: x(U)\to y(V)$ 是 C^r 类的. 由于坐标变换是 C^∞ 的, 这一定义与卡的选择无关.

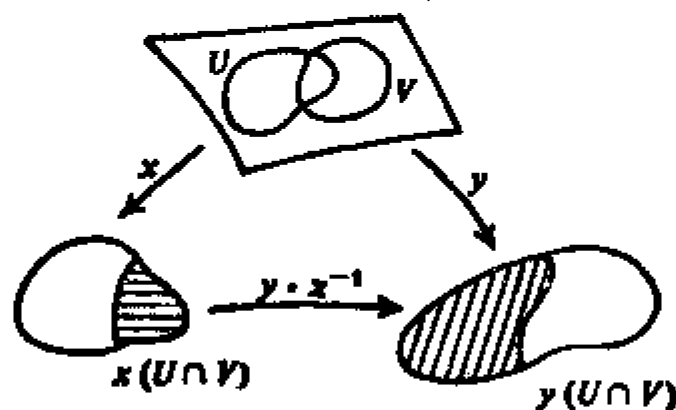


图 2

考虑满足 $\alpha(0)=p$ 的

1) 本书在一些地方不只用 M, N, S 等表示微分流形,也用 M^m, N^n, S^s 表示,这里上指标 m, n, s 表示微分流形的维数,即 $\dim M^m=m$. 下同.——译者注

可微曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M\subset\mathbb{R}^k$. 容易看出, α 按上述定义是可微的, 当且仅当 α 作为 $\mathbb{R}^k$ 中的曲线是可微的. 因此存在切向量 $(d\alpha/dt)(0)=\alpha'(0)$. 经过 p 点的所有这种曲线 α 的切向量集合称为 M 在 p 点的切空间,记作 TM_p. 考虑局部卡 $x: U\to\mathbb{R}^m$, $x(p)=0$. 容易看出, 导数 $dx^{-1}(0)$ 的象与 TM_p 重合. 因此, TM_p 是 m 维向量空间.

设 $f: M\to N$ 是一可微映射, $v\in TM_p$, $p\in M$. 考虑满足 $\alpha(0)=p$ 与 $\alpha'(0)=v$ 的可微曲线 $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$. 则 $f\circ\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon)\to N$ 是可微曲线, 故我们可定义

$$df(p)v=(d/dt)(f\circ\alpha)(0).$$

这个定义与曲线 α 无关.

映射 $df(p): TM_p\to TN_{f(p)}$ 是线性的, 称之为 f 在 p 的导数.

由于微分流形局部地是 Euclid 空间的一开子集, 故早先我们列举的微积分中的所有定理都可推广到流形上去.

0.11 命题 (链规则). 设 $f: M\to N$ 与 $g: N\to P$ 是微分流形之间的 C^r 类映射, 则 $g\circ f: M\to P$ 是 C^r 类的, 且

$$d(g\circ f)(p)=dg(f(p))\circ df(p). \quad \square$$

映射 $f: M\to N$ 称为 C^r 微分同胚, 如果它是 C^r 类的, 且有 C^r 类的逆 f^{-1}. 这时, 对每一点 $p\in M$, $df(p): TM_p\to TN_{f(p)}$ 是一同构, 其逆是 $df^{-1}(f(p))$. 特别地, M 与 N 具有相同的维数. 我们说 $f: M\to N$ 在 $p\in M$ 是一局部微分同胚, 如果存在邻域 $U(p)\subset M$ 与 $V(f(p))\subset N$, 使得 f 在 U 上的限制是映到 V 上的微分同胚.

0.12 命题 (反函数). 如果 $f: M\to N$ 是 C^r 类的, $r\geqslant 1$, 且对某点 $p\in M$, $df(p)$ 是一同构, 则 f 是在 p 点的一个 C^r 局部微分同胚. $\square$

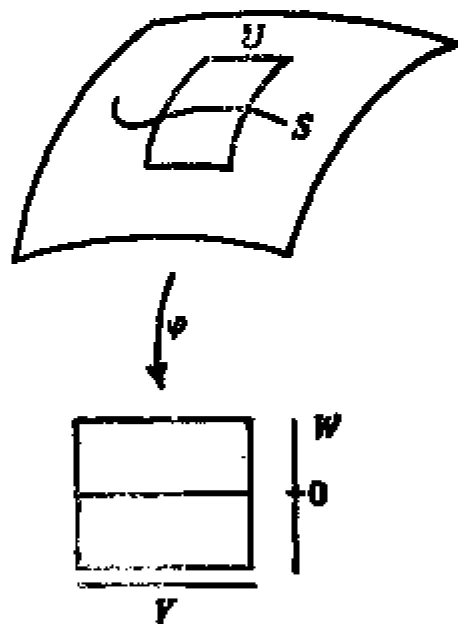


图 3

现在考虑流形 M 的一个子集 S. S 是 M 的一个 s 维 C^r 子流形，如果对每一点 $p\in S$, 存在包含 p 的开集 $U\subset M$, 包含 0 的开集 $V\subset\mathbb{R}^s$, 以及包含 0 的开集 $W\subset\mathbb{R}^{m-s}$ 和 C^r 微分同胚 $\varphi: U\to V\times W$, 使得 $\varphi(S\cap U)=V\times\{0\}$(图 3).

我们注意，$\mathbb{R}^k$ 是一微分流形. 因此，若 $M\subset\mathbb{R}^k$ 是如上定义的一流形，则 M 是 $\mathbb{R}^k$ 的子流形. $M\subset\mathbb{R}^k$ 的子流形是包含在 M 中的 $\mathbb{R}^k$ 的子流形.

0.13 命题 (浸入的局部形式). 设 $f: M^m\to N^{m+n}$ 是一 C^r 映射，$r\geqslant 1$, $p\in M$ 是使 $df(p)$ 为单射的一点. 则存在邻域 $U(p)$, $V(f(p))$, $\mathbb{R}^m$ 中的 $U_0(0)$, $\mathbb{R}^n$ 中的 $V_0(0)$, 以及 C^r 微分同胚 $\varphi: U\to U_0$ 和 $\psi: V\to U_0\times V_0$, 使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x)=(x, V\to 0). \qquad \square$$

C^r 映射 $f: M\to N$ 是一浸入，如果对所有的 $p\in M$, $df(p)$ 是一单射，单射浸入 $f: M\to N$ 是一嵌入，如果 $f: M\to f(M)\subset N$ 是一同胚，其中 $f(M)$ 具有诱导拓扑. 这时 $f(M)$ 是 N 的一个子流形. 如果 $f: M\to N$ 仅仅是一个单射浸入，我们就说 $f(M)$ 是一个浸入子流形. 图 4 中的例子所表示的两个子流形，都是浸入的，但不是嵌入的.

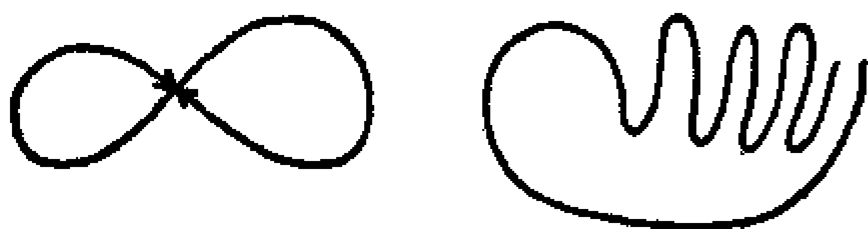


图 4

0.14 命题(浸没的局部形式). 设 $f: M^{m+n}\to N^n$ 是一 C^r 映射，$r\geqslant 1$, $p\in M$ 是使 $df(p)$ 为一满射的点，则存在邻域 $U(p)$, $V(f(p))$, $\mathbb{R}^m$ 中的 $U_0(0)$, $\mathbb{R}^n$ 中的 $V_0(0)$, 以及微分同胚 $\varphi: U\to U_0\times V_0$ 和 $\psi: V\to V_0$, 使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x, y)=y$. $\square$

点 $q\in N$ 称为 C^r 映射 $f: M^m\to N^n$ 的正则值，$r\geqslant 1$, 如果对一切满足 $f(p)=q$ 的 $p\in M$, $df(p)$ 是一满射. 由上面最后一个命题得知，$f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-n$ 维 C^r 子流形.

0.15 命题(Sard). 设 $f: M\to N$ 是 C^∞ 映射, 则 f 的正则值集合是剩余集; 特别地, 它在 N 中稠密.

取局部卡, 并利用流形的每一开覆盖有可数的子覆盖这一事实, 再由 Sard 定理, 就可证明命题 0.15. □

我们注意到, 如果 M 是紧的, 则 $f: M\to N$ 的正则值集合是 N 中的开稠集.

考虑流形 M 的用开集组成的可数覆盖 $\{U_n\}$. 我们说这个覆盖是局部有限的, 如果对每一点 $p\in M$, 存在 p 的邻域 V, 它只与此覆盖的有限个元素相交. 称满足下述条件的非负的 C^∞ 实函数族 $\{\varphi_n\}$ 为从属于覆盖 $\{U_n\}$ 的单位分解:

(a) 对每个指标 n, φ_n 的支集包含在 U_n 中; 我们知道, 所谓 φ_n 的支集是指使 φ_n 取正值的点集的闭包;

(b) 对一切 $p\in M$, $\sum\limits_n \varphi_n(p)=1$.

0.16 命题. 对 M 的一个给定的局部有限的可数覆盖, 存在从属于此覆盖的一个单位分解. □

推论 1. 设 $K\subset M$ 是一闭子集, 则存在满足 $f^{-1}(0)=K$ 的 C^∞ 映射 $f: M\to\mathbb{R}$. □

推论 2. 设 $f: M\to\mathbb{R}^s$ 是一 C^r 映射, 其中 $M\subset\mathbb{R}^k$ 是一闭流形, 则存在 C^r 映射 $\tilde{f}: \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^s$, 使得 $\tilde{f}|M=f$. □

由此命题得知, 给定 M 中的两个开集 U, V, $\overline{U}\subset V$, 存在 C^∞ 实值函数 $\varphi\geqslant 0$, 使得在 U 上 $\varphi=1$, 在 $M-V$ 上 $\varphi=0$. 这样的函数称为冲击函数.

现在我们定义流形 $M^m\subset\mathbb{R}^k$ 的切丛 TM. 令 $TM=\{(p, v)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k: p\in M, v\in TM_p\}$. 将 TM 作为 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ 的子集给出诱导拓扑, 于是, 自然投影 $\pi: TM\to M$, $\pi(p, v)=p$ 连续. 下面证明 TM 是一微分流形且 π 是 C^∞ 类的. 设 $x: U\to\mathbb{R}^m$ 是 M 的一个局部卡, 我们用

$$Tx(p, v)=(x(p), dx(p)v)$$

来定义映射 $Tx: \pi^{-1}(U)\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$. 易见, $(Tx, \pi^{-1}(v))$ 是 TM

的一个局部卡. 因此, $TM\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ 是一流形. 我们注意到, 利用局部卡$(Tx, \pi^{-1}(U))$, π 的表达式就是 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ 在第一个因子上的自然投影. 因此 π 是 C^∞ 的, 还容易看出, 如果 $f: M\to N$ 是 C^{r+1} 类的, 则

$$df: TM\to TN,\ df(p, v)\to(f(p),\ df(p)v)$$

是 C^r 类的.

正象我们早先所提醒的, 流形的抽象定义比我们刚才所叙述的更具一般性. 设 M 是一个具有可数基的 Hausdorff 拓扑空间. M 中的局部卡是 (x, U), 其中 $U\subset M$ 为开集, $x: U\to U_0\subset\mathbb{R}^m$ 是将 U 映到 $\mathbb{R}^m$ 的开子集 U_0 上的同胚. 我们说 U 是 M 中的参数化邻域, 如果 (x, U) 和 (y, V) 是 M 中满足 $U\cap V\neq\varnothing$ 的两个局部卡, 则坐标变换 $y\circ x^{-1}: x(U\cap V)\to y(U\cap V)$ 是同胚. $C^r(r\geqslant1)$ 微分流形是由拓扑空间和满足下述条件的一族局部卡一起组成的:

(a) 参数化邻域族覆盖 M;

(b) 坐标变换是 C^r 微分同胚.

这样一族局部卡称为 M 的 C^r 图册.

应用这种局部卡, 我们就可以象前面做过的那样来定义这些流形间的映射的可微性. 特别, 一条曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$ 是可微的, 如果 $x\circ\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ 是可微的, 其中 (x, U) 是满足 $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)\subset U$ 的一个局部卡. α 在 $p=\alpha(0)$ 的切向量定义为满足 $\beta(0)=p$ 和 $d(x\circ\beta)(0)=d(x\circ\alpha)(0)$ 的可微曲线 $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$ 的集合. 这一定义与局部卡 (x, U) 的选择无关, M 在 p 点的切空间 TM_p 是过 p 的所有可微曲线的切向量的集合. 可见 TM_p 具有自然的 m 维向量空间结构. 如果 $f: M\to N$ 是流形间使得 $f(p)=q$ 的可微映射, 我们定义映射 $df(p): TM_p\to TN_q$ 如下, 它将曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$ 在 p 点的切向量变为曲线 $f\circ\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to N$ 在 q 点的切向量. 易见, 此定义与曲线 α 的选择无关, 且 $df(p)$ 是线性映射. 我们说 $f: M\to N$ 是浸入, 如果对一切 $p\in M$, $df(p)$ 是单射. 若单射浸入 $f: M\to N$ 有连续逆 $f^{-1}: f(M)\subset N\to M$, 则 f

称为嵌入. 如果 $f: M\to\mathbb{R}^k$ 是 C^∞ 嵌入, 则按照早先我们给出的定义, $f(M)\subset\mathbb{R}^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的子流形.

下面的定理把流形的抽象定义与 Euclid 空间的子流形联系起来了.

0.17 定理(Whitney). 如果 M 是 m 维微分流形, 则存在一正则的[1]嵌入 $f: M\to\mathbb{R}^{2m+1}$. □

设 M 是微分流形, $S\subset M$ 为子流形. 若 V 是 S 在 M 中的一个邻域, $\pi: V\to S$ 是一个 C^∞ 浸没, 使得对每个 $p\in S$ 有 $\pi(p)=p$, 则称 (V,π) 为 S 的管状邻域.

0.18 定理. 每一个子流形 $S\subset M$ 都有管状邻域. □

最后, 每一个 $C^r(r\geqslant 1)$ 流形自然都能作为一个 C^∞ 流形来考虑.

0.19 定理(Whitney). 设 M 是一 $C^r(r\geqslant 1)$ 流形, 则存在 C^r 嵌入 $f: M\to\mathbb{R}^{2m+1}$, 使得 $f(M)$ 是 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 的一个闭 C^∞ 子流形. □

由定理 0.17, 此结果等价于: 若 $\mathscr{A}$ 是 M 上的一个 C^r 图册, 则在 M 上存在一个 C^∞ 图册 $\tilde{\mathscr{A}}$, 使得当 $(x,U)\in\mathscr{A}$, $(\tilde{x},\tilde{U})\in\tilde{\mathscr{A}}$, $U\cap\tilde{U}\neq\varnothing$ 时, $\tilde{x}\circ x^{-1}$ 与 $x\circ\tilde{x}^{-1}$ 都是 C^r 类的.

§1. 流形上的向量场

现在开始对微分方程进行定性研究. 由于这一研究有局部和整体两方面的内容, 很自然将此问题放在微分流形上讨论. 首批整体性的结果之一就是本节末我们将要讨论的 Poincaré-Bendixson 定理.

设 $M^m\subset\mathbb{R}^k$ 是一微分流形. M[2] 上的 C^r 向量场是 C^r 映射 $X: M\to\mathbb{R}^k$, 对每一点 $p\in M$, 它赋予向量 $X(p)\in TM_p$. 即它是一 C^r 映射 $X: M\to TM$, 使得 πX 为 M 上的恒等映射, 其中

1) 映射 $f: M\to N$ 称为正则的, 若对 N 中任意紧子集 Y, $f^{-1}(Y)$ 在 M 中也是紧的. ——译者注

2) 此处的 M 即 M^m, 下同. ——译者注

π 是 TM 到 M 的自然投影. 我们以 $\mathscr{X}^r(M)$ 记 M 上的所有 C^r 向量场的集合.

$X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的通过点 $p\in M$ 的**积分曲线**是使 $\alpha(0)=p$, 且对一切 $t\in I$ 满足 $\alpha'(t)=X(\alpha(t))$ 的 C^{r+1} 映射 $\alpha: I\to M$, 其中 I 是包含 0 的一个区间. 积分曲线的象称为**轨道**或**轨线**.

如果 $f: M\to N$ 是 C^{r+1} 微分同胚, 且 $X\in\mathscr{X}^r(M)$, 则由 $Y(q)=df(p)(X(p))$, $q=f(p)$ 定义的 $Y=f_*X$ 是 N 上的一个 C^r 向量场, 这是因为 $f_*X=df\circ X\circ f^{-1}$. 如果 $\alpha: I\to M$ 是 X 的一条积分曲线, 则 $f\circ\alpha: I\to N$ 是 Y 的一条积分曲线, 特别地, f 将 X 的轨线变为 Y 的轨线. 因此, 如果 $x: U\to U_0\subset\mathbb{R}^m$ 是一局部卡, 则 $Y=x_*Y$ 是 U_0 的一个 C^r 向量场. 我们说 Y 是 X 在局部卡 (x, U) 中的表示. 由此, 可将解的存在性, 唯一性以及可微性的局部性定理推广到流形上的向量场上去. 如下列命题.

1.1 命题. 设 E 是 Banach 空间, F: $E\times M\to TM$ 是 C^r 映射, $r\geqslant 1$, 使得 $\pi F(\lambda, p)=p$, 其中 $\pi: TM\to M$ 是自然投影. 则对每一 $\lambda_0\in E$ 和每一 $p_0\in M$, 存在 λ_0 在 E 中的邻域 W, p_0 在 M 中的邻域 V, 实数 $\varepsilon>0$ 以及 C^r 映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V\times W\to M$, 使得 $\varphi(0, p, \lambda)=p$, 且对一切 $t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$, $p\in V$ 与 $\lambda\in W$ 有

$$(\partial/\partial t)\varphi(t, p, \lambda)=F(\lambda, \varphi(t, p, \lambda)).$$

此外, 如果 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$ 是向量场 $F_\lambda=F(\lambda, \cdot)$ 的满足 $\alpha(0)=p$ 的积分曲线, 则 $\alpha=\varphi(\cdot, p, \lambda)$. □

1.2 命题. 设 I, J 是两个开区间, $\alpha: I\to M$, $\beta: J\to M$ 是 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ $(r\geqslant 1)$ 的两条积分曲线. 如果对某个 $t_0\in I\cap J$, 有 $\alpha(t_0)=\beta(t_0)$, 则对一切 $t\in I\cap J$ 有 $\alpha(t)=\beta(t)$. 因此存在一条在 I 上与 α 重合, 在 J 上与 β 重合的积分曲线 $\gamma: I\cup J\to M$.

证明. 由局部唯一性, 若 $\alpha(t_1)=\beta(t_1)$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $|t-t_1|<\varepsilon$ 有 $\alpha(t)=\beta(t)$. 因此使得 α 与 β 重合的集合 $\tilde{I}\subset I\cap J$ 是一开集. 由于 $\tilde{I}$ 的补集也是开的, 而且 $I\cap I$ 连通, 故 $\tilde{I}=I\cap J$. □

1.3 命题. 设 M 是一紧流形, $X\in\mathscr{X}^r(M)$. 则在 M 上存在 X 的

一个整体 C^r 流，即存在一 C^r 映射 $\varphi: \mathbb{R}\times M\to M$，使得

$$\varphi(0, p)=p, \text{ 且}$$
$$(\partial/\partial t)\varphi(t, p)=X(\varphi(t, p)).$$

证明. 考虑任意一点 $p\in M$. 我们将证明：存在一条通过 p 且定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的积分曲线. 设 $(a, b)\subset\mathbb{R}$ 是满足 $0\in(a, b)$ 与 $\alpha(0)=p$ 的积分曲线 $\alpha: (a, b)\to M$ 的定义区间. 我们说 (a, b) 是最大的，如果对每一个具有上述性质的区间 J，都有 $J\subset(a, b)$. 我们断言，如果 (a, b) 是最大的，则 $b=+\infty$. 如若不然，考虑序列 $t_n\to b$, $t_n\in(a, b)$. 由于 M 是紧的，我们可以假定（通过取子序列）$\alpha(t_n)$ 收敛于某点 $q\in M$. 设 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)\times V_q\to M$ 是 X 在 q 的一个局部流. 取 n_0 使得 $b-t_{n_0}<\varepsilon/2$, 且 $\alpha(t_{n_0})\in V_q$. 若 $t\leqslant t_{n_0}$，定义 $\gamma(t)=\alpha(t)$；若 $t\geqslant t_{n_0}$，则定义 $\gamma(t)=\varphi(t-t_{n_0}, \alpha(t_{n_0}))$. 于是 $\gamma: (a, t_{n_0}+\varepsilon)\to M$ 是 X 的一条积分曲线，由于 $(a, t_{n_0}+\varepsilon)\supset(a, b]$，这与 (a, b) 是最大的矛盾. 同样，我们可以证明 $a=-\infty$. 因此存在满足 $\alpha(0)=p$ 的积分曲线 $\alpha: \mathbb{R}\to M$. 由命题 1.2，这条积分曲线是唯一的. 我们定义 $\varphi(t, p)=\alpha(t)$. 显然 $\varphi(0, p)=p$, 且 $(\partial/\partial t)\varphi(t, p)=X(\varphi(t, p))$. 我们断言，对 $t, s\in\mathbb{R}$ 与 $p\in M$，有 $\varphi(t+s, p)=\varphi(t, \varphi(s, p))$. 事实上，令 $\beta(t)=\varphi(t+s, p)$, $\gamma(t)=\varphi(t, \varphi(s, p))$. 易见 β 与 γ 都是 X 的积分曲线，且 $\beta(0)=\gamma(0)=\varphi(s, p)$. 这就证明了我们的断言. 最后，我们证明 φ 是 C^r 类的. 设 $p\in M$, $\psi: (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)\times V_p\to M$ 是 X 的一个局部流，由命题 1.1，它是 C^r 类的. 又由解的唯一性，ψ 是 φ 在 $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)\times V_p$ 上的限制. 特别地，当 $|t|<\varepsilon_p$ 时，$\varphi_t=\varphi(t, \cdot)$ 在 V_p 上是 C^r 类的. 由 M 的紧性，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $|t|<\varepsilon$ 时 φ_t 在 M 上是 C^r 类的. 此外，对任一 $t\in\mathbb{R}$，我们可以选取整数 n，使得 $|t/n|<\varepsilon$，于是可得 $\varphi_t=\varphi_{t/n}\circ\cdots\circ\varphi_{t/n}$ 是 C^r 类的. 对任一 $t_0\in\mathbb{R}$ 及 $p_0\in M$，φ 在 (t_0, p_0) 的邻域内是 C^r 类的. 因为当 $|t-t_0|<\varepsilon_{p_0}$ 且 $p\in V_{p_0}$ 时，φ_{t_0} 与 $\varphi|(-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0})\times V_{p_0}$ 是 C^r 类的，因此 $\varphi(t,p)=\varphi_{t_0}\circ\varphi(t-t_0,p)$ 也是 C^r 类的. 定理证毕. □

推论. 设 $X\in\mathfrak{X}^r(M)$, $\varphi: \mathbb{R}\times M\to M$ 是由 X 确定的流. 对

每一$t\in\mathbb{R}$，映射X_t: $M\to M$, $X_t(p)=\varphi(t, p)$是C^r微分同胚. 此外，X_0=恒等映射，且对一切t, $S\in\mathbb{R}$，有$X_{t+s}=X_t\circ X_s$. □

设$X\in\mathscr{X}^r(M)$, $X_t(t\in\mathbb{R})$是X的流. 集合$\mathscr{O}(p)=\{X_t(p); t\in\mathbb{R}\}$称为$X$经过点$p\in M$的轨道. 如果$X(p)=0$，则经过$p$的轨道退化为一点$p$. 这时我们称$p$为$X$的奇点. 否则，映射$\alpha$: $\mathbb{R}\to M$, $\alpha(t)=X_t(p)$是一浸入. 如果α不是单射，则存在$\omega>0$，使得$\alpha(\omega)=\alpha(0)=p$，且对$0<t<\omega$有$\alpha(t)\neq p$. 这时$p$的轨道微分同胚于圆周$S^1$，我们称它为以$\omega$为周期的闭轨. 如果轨道既不是奇点，也不是闭轨，则称之为正则轨道. 因此正则轨道是直线的单射浸入的象.

点$p\in M$的ω极限集$\omega(p)$是由满足下述条件的点$q\in M$组成的集合：存在序列$t_n\to+\infty$，使得$X_{t_n}(p)\to q$. 类似地，定义p的α极限集为

$\alpha(p)=\{q\in M$; 存在序列$t_n\to-\infty$，使得$X_{t_n}(p)\to q\}$. 我们指出，p的α极限集是p关于向量场$-X$的ω极限集. 如果$\tilde{p}$属于p的轨道，则$\omega(p)=\omega(\tilde{p})$. 事实上，设$\tilde{p}=X_{t_0}(p)$，如果$X_{t_n}(p)\to q$，其中$t_n\to\infty$，则$X_{t_n-t_0}(\tilde{p})\to q$, $t_n-t_0\to\infty$. 这样，我们可以定义p的轨道的ω极限集为$\omega(p)$. 直观地说，p的轨道从$\alpha(p)$"出发"，到$\omega(p)$"终止".

例 1. 考虑中心在原点的单位球面$S^2\subset\mathbb{R}^3$，并且利用$\mathbb{R}^3$中的标准坐标(x, y, z). 称$p_N=(0, 0, 1)$为S^2的北极，$p_S=(0, 0, -1)$为S^2的南极. 我们用$X(x, y, z)=(-xz, -yz, x^2+y^2)$来定义$S^2$上的向量场$X$. 显然$X$是$C^\infty$类的，且$X$的奇点为$p_N$, p_S. 由于X与S^2的子午线相切，且方向向上，因此如果$p\in S^2-\{p_N, p_S\}$，则$\omega(p)=p_N$, $\alpha(p)=p_S$(图5).

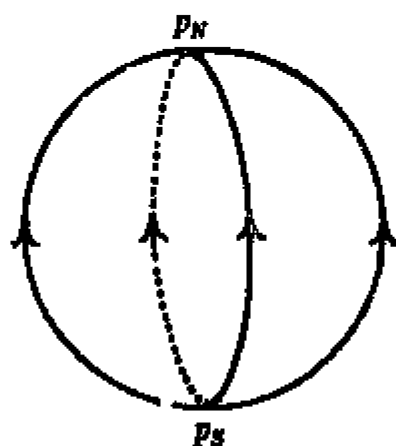


图 5

例 2. 环面上的有理流与无理流. 设φ: $\mathbb{R}^2\to T^2\subset\mathbb{R}^3$由下式给定

$$\varphi(u, v) = ((2+\cos 2\pi v)\cos 2\pi u,$$
$$(2+\cos 2\pi v)\sin 2\pi u,\ \sin 2\pi v).$$

我们看到，φ 是一个局部微分同胚，它将 $\mathbb{R}^2$ 的水平线变为 T^2 的纬线，将 $\mathbb{R}^2$ 的铅垂线变为 T^2 的子午线，将正方形 $[0, 1]\times[0, 1]$ 映上为 T^2. 此外，$\varphi(u, v)=\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$ 当且仅当存在整数 m 与 n，使得 $u-\tilde{u}=m$ 与 $v-\tilde{v}=n$. 对每个 $\alpha\in\mathbb{R}$，考虑由 $X^\alpha(u, v)=(1, \alpha)$ 给出的 $\mathbb{R}^2$ 中的向量场. 易见定义 $Y^\alpha=\varphi_* X^\alpha$ 是合理的，且它是 T^2 上的一个 C^∞ 向量场，Y^α 的轨道是 X^α 的轨道在 φ 作用下的象，X^α 的轨道都是 $\mathbb{R}^2$ 中斜率为 α 的直线. 我们将证明，当 α 为有理数时，Y^α 的每一条轨道都是闭的；当 α 为无理数时，Y^α 的每一条轨道都在 T^2 中稠密. 对每一 $c\in\mathbb{R}$，令 Δ_c 表示 $\mathbb{R}^2$ 中通过 $(0, c)$ 的以 α 为斜率的直线：$\Delta_c=\{(u, c+\alpha u): u\in\mathbb{R}\}$. 正如我们已经看到的，$\varphi(\Delta_c)$ 是 Y^α 的一条轨道. 如果 α 是有理数，则对每个 $c\in\mathbb{R}$，这种轨道都是闭的. 因为如果 $\alpha=n/m$，则 $(m, c+(n/m)m)\in\Delta_c$，且 $\varphi(m, c+n)=\varphi(0, c)$. 现在假设 α 是无理数，$c\in\mathbb{R}$. 我们断言，$C=\{\bar{c}\in\mathbb{R}: \varphi(\Delta_{\bar{c}})=\varphi(\Delta_c)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 由此得知，$\bigcup_{\bar{c}\in C}\Delta_{\bar{c}}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密. 从而 $\varphi(\Delta_c)=\varphi(\bigcup_{\bar{c}\in C}\Delta_{\bar{c}})$ 在 T^2 中稠密. 为证 C 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，只需证明 $G=\{m\alpha+n: m, n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 这是因为 $c\in C$ 当且仅当 $c-\bar{c}\in G$. 由于 G 是加群 $\mathbb{R}$ 的一个子群，故 G 在 $\mathbb{R}$ 中或者稠密或者离散. 因此只需证明 G 不是离散的. 对每个 $m\in\mathbb{Z}$，存在 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $u_m=m\alpha+n$ 属于区间 $[0, 1]$. 序列 u_m 有一聚点，且由于 α 为无理数，该序列的各项相异，从而 G 是稠密集.

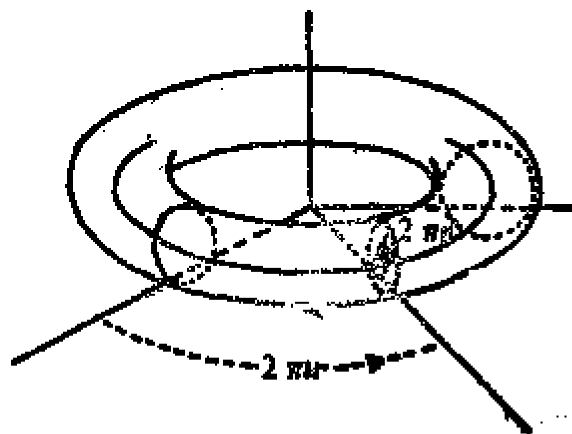


图 6

我们依据 α 是有理数还是无理数来称上面的向量场 Y^α 为 T^2 上的**有理场**或**无理场**. 如果 α 为有理数，则任一轨道的 ω 极限集是其自身. 如果 α 为

无理数，则任一轨道的 ω 极限集是整个 T^2.

例 3(梯度向量场). 考虑流形 $M^m\subset\mathbb{R}^k$. 对每一点 $p\in M$, 在 TM_p 中取由 $\mathbb{R}^k$ 诱导的内积 $\langle,\rangle_p$. 记由此内积诱导的范数为 $\|\|_p$, 或简单地记为 $\|\|$. 如果 X 与 Y 是 M 上的 C^∞ 向量场，则函数 g: $M\to\mathbb{R}$, $g(p)=\langle X(p), Y(p)\rangle_p$ 是 C^∞ 类的. 设 f: $M\to\mathbb{R}$ 是 C^{r+1} 映射. 对每一点 $p\in M$, 存在唯一的向量 $X(p)\in TM_p$, 使得对一切 $v\in TM_p$,

$$df_pv=\langle X(p), v\rangle_p.$$

如此定义的向量场 X 是 C^r 类的，称之为 f 的**梯度场**，记作 $X=\operatorname{grad}f$. 现在我们将给出梯度场的某些基本性质. 首先，$\operatorname{grad}f(p)=0$ 当且仅当 $df_p=0$. 沿着 $X=\operatorname{grad}f$ 的非奇点的轨道，f 是严格递增的，这是因为 $df_pX(p)=\|X(p)\|^2$. 特别，$\operatorname{grad}f$ 没有闭轨. 此外，任一轨道的 ω 极限集是由奇点所组成. 因为如果 $X(q)\neq0$ 且存在 $p\in M$, 使得 $q\in\omega(p)$. 设 S 是 $f^{-1}(f(q))$ 与 q 的小邻域的交，则 S 是正交于 $X=\operatorname{grad}f$ 的 $m-1$ 维子流形. 由流的连续性，通过接近于 q 的任一点的轨道必与 S 相交. 由于 $q\in\omega(p)$, 故在 p 的轨道上存在趋于 q 的点列 p_n. 因此 p 的轨道与 S 的交点就多于一点(事实上有无穷多个点)，这就导致矛盾，因为 f 沿着轨道是增加的. 另一方面，显然，如果梯度向量场轨道的 ω 极限集包含两个以上奇点，那它就必须包含无穷多个奇点. 下面我们说明这种情况确实会出现.

设 f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 由

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\begin{cases}e^{1/(r^2-1)}, & \text{当 } r<1 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } r=1 \text{ 时};\\ e^{-1/(r^2-1)}\sin(1/(r^2-1)-\theta), & \text{当 } r>1 \text{ 时}\end{cases}$$

定义. 令 $X=\operatorname{grad}f$, 则 $X(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$, 当且仅当 $r=0$, 或 $r=1$. 我们将证明，存在 X 的一条轨道，其 ω 极限集是以原点为中心，以 1 为半径的圆周 C. 注意到 $f^{-1}(0)=C\cup E_1\cup E_2$, 其中 E_1 与 E_2 是由下面两个式子定义的螺线(图 7),

$$E_1=\{(r\cos\theta, r\sin\theta): r=1+1/(\pi+\theta), -\pi<\theta<+\infty\},$$

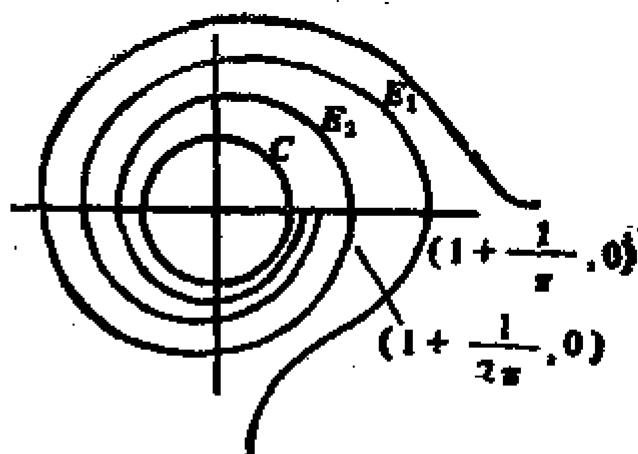


图 7

$$E_2=\{(r\cos\theta,\ r\sin\theta):\ r=1+1/(2\pi+\theta),\ -2\pi<\theta<\infty\}.$$

考虑区域

$$U=\{(r\cos\theta,\ r\sin\theta):\ 1+1/(2\pi+\theta)<r<1+1/(\pi+\theta),\ \theta\geqslant 0\}$$

并设 I 为区间 $\{(x,\ 0):\ 1+1/2\pi\leqslant x\leqslant 1+1/\pi\}$. 我们将证明，存在点 $p_0\in I$，使得它的正轨道停留在区域 U 中. 因此 p_0 的 ω 极限集将是圆周 C. 图 8 中我们描绘了函数 f 在 U 上的一些等值曲线.

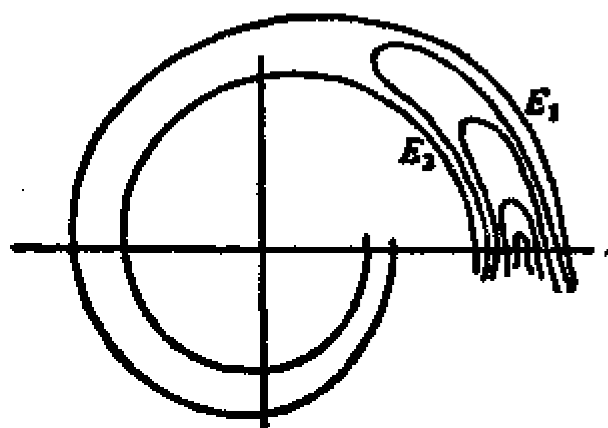


图 8

通过点 $p\in I$ 的等值曲线与 U 的交集，是端点在 I 中的一条紧线段，当 p 趋于 I 的端点时，此线段的长度趋于无穷.

设 $q\in E_1$. 由于 $X(q)$ 正交于 E_1，且方向指向 U 的外部(因为 f 在 U 中为负). 我们看到，q 的负轨道与过 I 内部点的等值曲线之一相交. 因此，集合 $J=\{p\in I;\ 对\ 0\leqslant t<S,\ X_t(p)\in U$ 且 $X_s(p)\in E_1\}$ 非空. 此外，给定 $q\in E_1$，存在 $p\in J$，使得 p 的正轨道包含 q，且 p 与 q 之间的轨道弧位于 U 中. 另一方面，如果 $q\in E_2$，q 的负轨道也与 I 相交，因此 $J\neq I$.

设 p_0 是 J 的下确界. 我们断言，p_0 的正轨道停留在 U 中，因

为否则存在 p_0 的正轨道上的一点 q，使得 p_0 与 q 之间的轨道弧段包含在 U 中，且对充分小的 $t>0$，$X_t(q)\in U$. 因此，$q\in E_1$ 或者 $q\in E_2$，或者 $q\in I$. 如果 $q\in E_1$，则通过 J 的每一正轨道必与 E_1 相交，交点在 $(1+1/\pi, 0)$ 与 q 之间的线段上. 这就矛盾，因为经过 E_1 任一点的负轨道必与 I 相交，从而与 J 相交. 如果 $q\in E_2$ 或者 $q\in I$，则接近 p_0 的每一点的正轨道不与 E_1 相遇而离开 U，但这与 p_0 是 J 的下确界矛盾. 因此，p_0 的正轨道包含在 U 中，断言得证.

我们指出，例 1 中 S^2 上的向量场是球面 S^2 上的点到它在 p_N 的切平面上的高度函数的梯度. 其它简单的例子可由考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面到平面上的点的距离函数来得到. 这类例子后面还要讨论.

下面我们将讨论 ω 极限集的某些一般性质.

1.4 命题. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，M 是一紧流形，$p\in M$. 则

(a) $\omega(p)\neq\varnothing$;

(b) $\omega(p)$ 为闭集;

(c) $\omega(p)$ 关于 X 的流是不变集，即 $\omega(p)$ 是 X 的轨道的并集; 以及

(d) $\omega(p)$ 连通.

证明. 设 $t_n\to\infty$，$p_n=X_{t_n}(p)$. 由于 M 是紧流形，故 p_n 有极限属于 $\omega(p)$ 的收敛子序列. 因此 $\omega(p)\neq\varnothing$. 现在假定 $q\notin\omega(p)$. 则对某个 $T>0$，存在与 $\{X_t(p): t\geqslant T\}$ 不相交的邻域 $V(q)$. 由此得知 $V(q)$ 中没有 $\omega(p)$ 的点，故 $\omega(p)$ 为闭集，下面假设 $q\in\omega(p)$，且 $\tilde{q}=X_s(q)$. 取 $t_n\to\infty$ 使得 $X_{t_n}(p)\to q$. 则 $X_{t_n+s}(p)=X_sX_{t_n}(p)$ 收敛于 $X_s(q)=\tilde{q}$，故 $\tilde{q}\in\omega(p)$，这就证明了 $\omega(p)$ 关于流是不变的. 假设 $\omega(p)$ 不连通，则可选取开集 V_1 与 V_2，使得 $\omega(p)\subset V_1\cup V_2$，$\omega(p)\cap V_1\neq\varnothing$，$\omega(p)\cap V_2\neq\varnothing$，且 $\overline{V}_1\cap\overline{V}_2=\varnothing$. p 的轨道既聚集在 V_1 上又聚集在 V_2 上. 因此，给定 $T>0$，存在 $t>T$，使得 $X_t(p)\in M-(V_1\cup V_2)=K$. 从而存在序列 $t_n\to\infty$，满足 $X_{t_n}(p)\in K$. 如有必要就取子序列，使得对某个 $q\in$

K, 我们有 $X_{t_n}(p) \to q$. 但这导数 $q \in \omega(p) \subset V_1 \cup V_2$, 矛盾. □

注. 显然, 上面的性质对 α 极限集也成立. 然而, 如果流形不是紧的, 我们就不得不限于考虑包含在一紧集中的正轨道(或负轨道). 图 9 指出的 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场的轨道, 其 ω 极限集不连通.

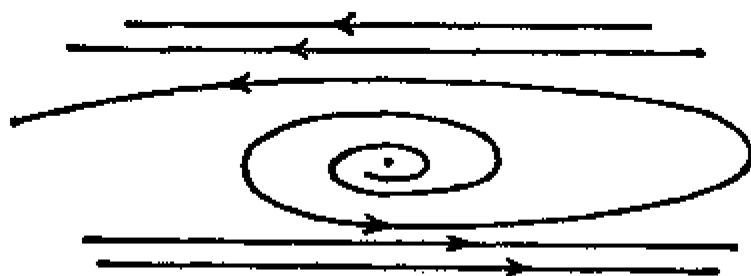


图 9

我们已经证明, 环面 T^2 上无理流的轨道的 ω 极限集是整个环面. 在 T^2 上存在更复杂的向量场例子, 它们的 ω 极限集相当复杂, 例如第四章例 13. 对于球面 S^2, 情况就简单多了, 因为有以下拓扑事实: 每条不自交的闭连续曲线将 S^2 分割为两个同胚于圆盘的区域(Jordan 曲线定理). S^2 上的向量场的 ω 极限集的结构可由 Poincaré–Bendixson 定理来描述, 此定理的证明将通过一系列的引理来进行.

设 $X \in \mathscr{X}^r(S^2)$, $r \geq 1$.

1.5 引理. 设 $\Sigma \subset S^2$ 是一条与 X 匀断相交的截线. 则经过点 $p \in S^2$ 的正轨道 $\mathcal{O}_+(p)$ 与 Σ 相交一单调序列, 即若 p_i 是 $\mathcal{O}_+(p)$ 与 Σ 的交点, 则 $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}] \subset \Sigma$.

证明. 考虑从 p_{i-1} 到 p_i 的一段轨线弧与线段 $[p_{i-1}, p_i] \subset \Sigma$. 它们一起构成一闭曲线, 此闭曲线围成一圆盘 D. 由于 X 与 Σ 匀断相交且 X 的方向指向 D 的内部, 故 p_i 的正轨道包含在 D 内, 因此 $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$

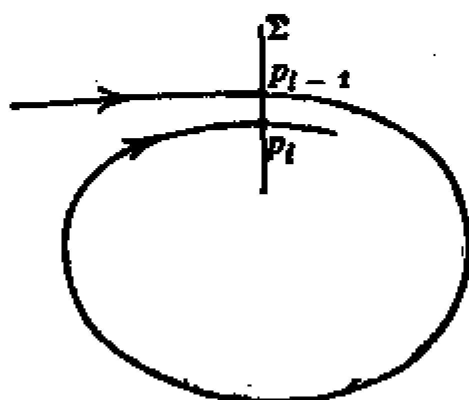


图 10

推论. 轨线 γ 的 ω 极限集与 Σ 至多相交于一点.

证明. 假如 $\omega(\gamma)$ 包含 Σ 的两点 q_1 与 q_2. 设 p_n 是 γ 与 Σ 的交点序列, 则存在 p_n 的分别收敛于 q_1 与 q_2 的子序列, 但这与 p_n 的单调性矛盾. □

1.6 引理. 如果轨线 γ 的 ω 极限集不包含奇点, 则 $\omega(\gamma)$ 是一闭轨, 且通过充分接近于 γ 上点 p 的点的轨线, 均以此同一闭轨作为它们的 ω 极限集.

证明. 设 $q\in\omega(\gamma)$. 我们将证明 q 的轨道是闭的. 取 $x\in\omega(q)$, 则它不可能是奇点, 考虑包含 x 并且与 X 匀断相交的截线 Σ. 由上一引理, q 的正轨道与 Σ 相交于一单调序列 $q_n\to x$. 由于 $q_n\in\omega(\gamma)$, 上面的推论指出, 对一切 n 有 $q_n=x$. 因此, q 的轨道是闭的. 现取一个包含 q 且与 X 匀断相交的截线, 如引理 1.5, 可推得 $\omega(\gamma)$ 为 q 的轨道. 第二个论断的证明立即可得. □

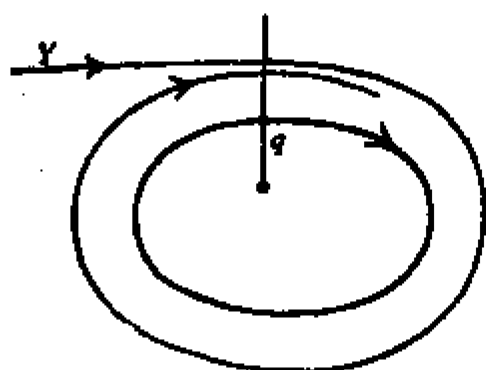


图 11

1.7 引理. 设 p_1 与 p_2 是向量场的两个不同奇点, 它们包含在 $p\in S^2$ 的 ω 极限集之中, 则至多存在一条轨道 $\gamma\subset\omega(p)$, 使得 $\alpha(\gamma)=p_1$, $\omega(\gamma)=p_2$.

证明. 我们用反证法证明. 假设存在两条轨道 $\gamma_1,\gamma_2\subset\omega(p)$, 使得 $\alpha(\gamma_i)=p_1$, $\omega((\gamma_i)=p_2$, $i=1, 2$. 由轨道 γ_1, γ_2 以及点 p_1 与 p_2 组成的曲线 C_1 将 S^2 分为两个圆盘, 其中之一包含 p, 如图 12 所示, 设 Σ_1 和 Σ_2 分别是经过点 $q_1\in\gamma_1$ 和 $q_2\in\gamma_2$ 的与 X 匀断相交的截线. 由于 $\gamma_1,\gamma_2\subset\omega(p)$, p 的正轨道先交 Σ_1 于 a, 再交 Σ_2 于 b. 考虑

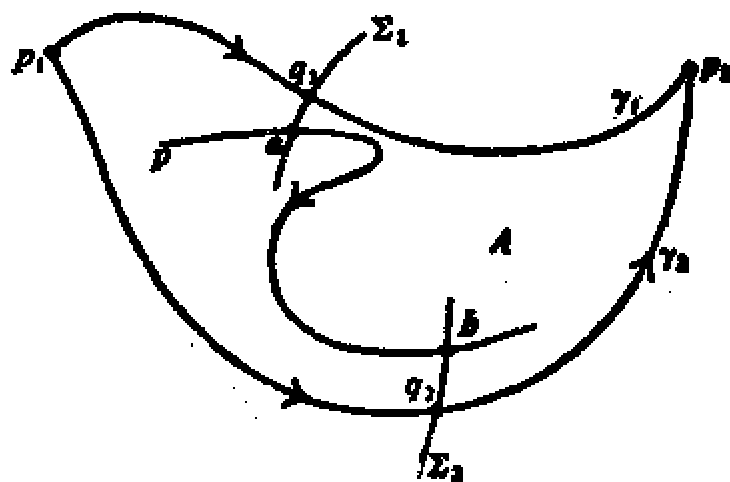


图 12

由弧 $ab\subset\mathcal{O}(p)$, $bq_2\subset\Sigma_2$, $q_2p_2\subset\gamma_2$, $p_2q_1\subset\gamma_1$, $q_1a\subset\Sigma_1$ 以及点 p_2 组成的曲线 C_2. 我们看到, C_2 将 S^2 分为两个圆盘 A 与 B. 点 b 的正轨道整个停留在 A 中, 但这与 γ_1, $\gamma_2\subset\omega(p)$ 矛盾.

1.8 定理(Poincaré–Bendixson). 设 $X\in\mathscr{X}^r(S^2)$ 是具有限个奇点的向量场. 取 $p\in S^2$, 且令 $\omega(p)$ 为 p 的 ω 极限集. 则下列情形之一成立:

(1) $\omega(p)$ 是一奇点;

(2) $\omega(p)$ 是一闭轨;

(3) $\omega(p)$ 是由奇点 $p_1, \cdots, p_n$, 以及满足下面条件的正则轨道所组成: 若 $\gamma\subset\omega(p)$, 则有 $\alpha(\gamma)=p_i$ 且 $\omega(\gamma)=p_j$.

证明. 如果 $\omega(p)$ 不含奇点, 则由引理 1.6, $\omega(p)$ 是一闭轨, 如果 $\omega(p)$ 不含正则点, 则由于 X 只含有限个奇点, 又 $\omega(p)$ 是连通的, 因此 $\omega(p)$ 为唯一奇点.

现在, 假定 $\omega(p)$ 既含正则点又含奇点, 设 γ 是 $\omega(p)$ 中一条正则轨道. 我们断言, $\omega(\gamma)$ 是一奇点. 如果 $\omega(\gamma)$ 含有某正则点 q, 取经过 q 并与 X 匀断相交的截线 Σ. 由于 $\gamma\subset\omega(p)$, 由引理 1.5 的推论, γ 与 Σ 仅交于一点. 由引理 1.6, γ 是一闭轨, 且 $\omega(p)=\gamma$. 但这与 $\omega(p)$ 含有奇点矛盾. 因此 $\omega(\gamma)$ 为一奇点, 类似地, $\alpha(\gamma)$ 也为一奇点. □

我们通过下面的一些例子来说明与这个定理有关的一些事实.

例. 设 X 是 S^2 上的向量场, 如图 13 所示. 北极与南极是奇点, 赤道是一条闭轨, 其它轨道都从极点出发而终止于赤道.

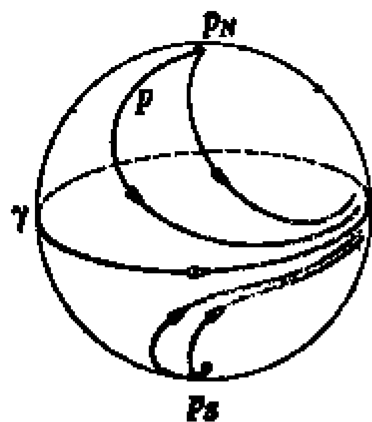


图 13

设 $\varphi: S^2\to\mathbb{R}$ 是在球面赤道上等于零的非负 C^∞ 函数. 考虑向量场 $Y=\varphi\cdot X$. 赤道上的每一点都是 Y 的奇点. 若点 p 既不是极点, 也不在赤道上, 则它的 ω 极限集是整个赤道. 这个例子说明, 如果去掉奇点为有限个这一假设, Poincaré–Bendixson 定理就不成立.

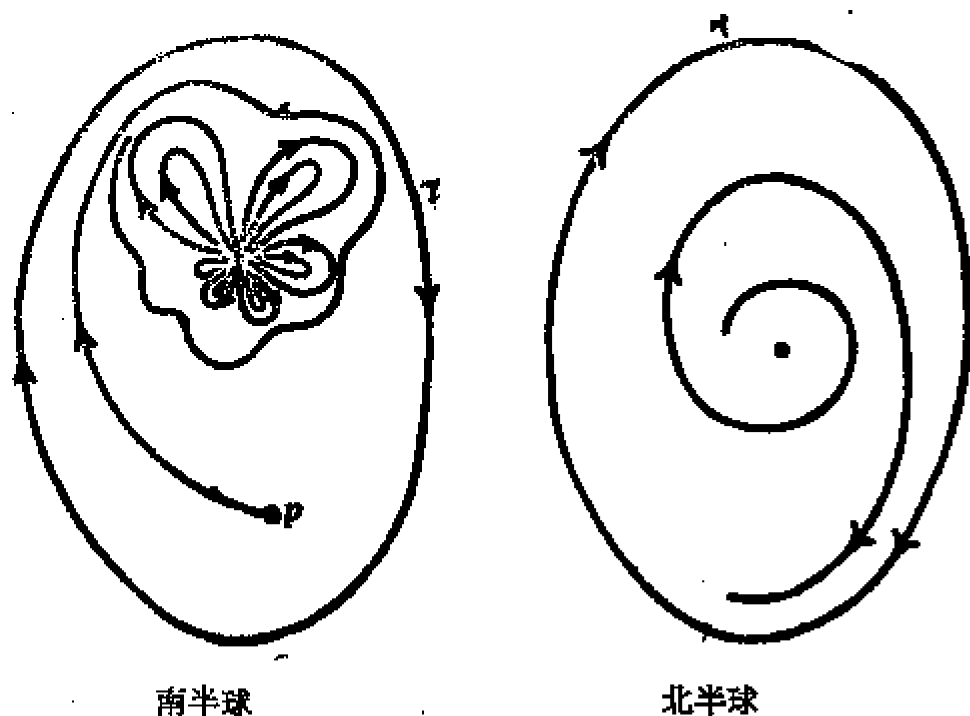


图 14

例. 设 X 是 S^2 上的向量场，如图 14 所示. 此向量场有两个奇点 p_S 与 p_N 和一条闭轨 γ. 此半球面上的轨道以 p_N 为 α 极限集，以 γ 为 ω 极限集. 南半球面上的奇点 p_S 是玫瑰花中心，无穷多个花瓣都是由从 p_S 出发而终止于 p_S 的轨道所围成. 每个花瓣内部的情况如图 15 所示.

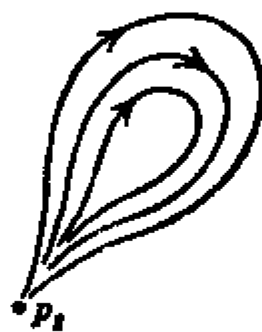


图 15

南半球面上的其它轨道都以 γ 为 α 极限集，以玫瑰花的边缘为 ω 极限集. 因此，一条轨道的 ω 极限集可以含有无穷多条正则轨道. 这表明如果 $p_1=p_2$，引理 1.7 就不成立.

§2. C^r 映射空间的拓扑

本节我们在紧流形 M 上的 C^r 向量场空间 $\mathscr{X}^r(M)$ 中引入自然拓扑，按照这个拓扑，两个向量场 $X, Y\in\mathscr{X}^r(M)$ 是接近的，如果在 M 的每一点，这两个向量场以及它们直到 r 阶的导数都接近.

我们先考虑定义在紧流形 M 上的 C^r 映射空间 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$,

$0\leqslant r<\infty$. 在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 上有自然的向量空间结构: 对 $f, g\in C^r(M, \mathbb{R}^s)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$(f+g)(p)=f(p)+g(p),$$
$$(\lambda f)(p)=\lambda f(p).$$

再取开集 $V_1, \cdots, V_k$ 作为 M 的有限覆盖, 使得对每个 V_i, 存在局部卡 (x_i, U_i) 满足 $V_i\subset U_i$, 且 $x_i(U_i)=B(2)$, $x_i(V_i)=B(1)$, 其中 $B(1)$ 与 $B(2)$ 是中心在 $\mathbb{R}^m$ 的原点, 半径为 1 与 2 的球. 对 $f\in C^r(M, \mathbb{R}^s)$, 记 $f^i=f\circ x_i^{-1}: B(2)\to\mathbb{R}^s$. 定义

$$\|f\|_r=\max_i\sup\{\|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \cdots, \|d^rf^i(u)\|: u\in B(1)\}.$$

2.1 命题. $\|\ \|_r$ 是 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中的完备范数.

证明. 显然 $\|\ \|_r$ 是 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中的范数. 剩下来我们证明每个 Cauchy 序列都收敛. 设 $f_n: M\to\mathbb{R}^s$ 是在范数 $\|\ \|_r$ 下的 Cauchy 序列. 若 $p\in M$, 则 $f_n(p)$ 是 $\mathbb{R}^s$ 中的 Cauchy 序列, 因此收敛. 令 $f(p)=\lim f_n(p)$. 特别, $f_n^i(u)\to f^i(u)$, 对 $u\in B(1)$, $i=1, \cdots, k$. 另一方面, 对每点 $u\in B(1)$, $df_n^i(u)$ 是 $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$ 中的 Cauchy 序列, 因此收敛于线性变换 $T^i(u)$. 我们断言, $df_n^i\to T^i$ 的收敛性是一致的. 事实上,

$$\|df_n^i(u)-T^i(u)\|\leqslant\|df_n^i(u)-df_{n'}^i(u)\|$$
$$+\|df_{n'}^i(u)-T^i(u)\|.$$

给定 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 使得只要 n, $n'>n_0$, 对一切 $u\in B(1)$ 均有 $\|df_n^i(u)-df_{n'}^i(u)\|<\varepsilon/2$. 另一方面, 对每一点 $u\in B(1)$, 存在依赖于 u 的 $n'\geqslant n_0$, 使得 $\|df_{n'}^i(u)-T^i(u)\|<\varepsilon/2$. 因此, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 对一切 $u\in B(1)$, 我们有 $\|df_n^i(u)-T^i(u)\|<\varepsilon$. 由命题 0.0, f^i 是 C^1 类的, 且 $df^i=T^i$. 由此得知, 按范数 $\|\ \|_1$ 有 $f_n\to f$. 按照同样的推断, 用归纳法我们可以证明 f 是 C^r 类的, 且按范数 $\|\ \|_r$ 有 $f_n\to f$. □

易见, 用范数 $\|\ \|_r$ 在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 上定义的拓扑与 M 的覆盖 $V_1, \cdots, V_k$ 无关.

下面, 我们给出具 C^r 拓扑的空间 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 的某些重要性

腻.

拓扑空间的子集称为剩余的，如果它包含可数个开稠集的交．一个拓扑空间称为 Baire 空间，如果它的每个剩余子集都稠密．由于 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 是完备的距离空间．因此可以立刻得到下面的命题．

2.2 命题． $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 是 Baire 空间． □

让我们来证明，$C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 包含一个可数的稠密子集，对 $f\in C^r(M, \mathbb{R}^s)$，考虑 $f^i=f\circ X_i^{-1}: B(2)\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^s$．注意到由

$$j^r f^i(u)=(u, f^i u, df^i(u), \cdots, d^r f^i(u))$$

定义的映射

$$j^r f^i: B(2)\to B(2)\times\mathbb{R}^s\times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)\times\cdots\times L^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)=E$$

连续．故 $J^r(f^i)=j^r f^i\overline{OB(11)}$ 是 E 的紧子集．容易看出，如果 $\mathscr{W}$ 是 f 在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中的一个邻域，则存在 $J^r(f)=J^r(f^1)\times\cdots\times J^r(f^k)$ 在 $E\times E\times\cdots\times E$ 中的邻域 W，使得当 $g\in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 且 $J^r g=J^r g^1\times\cdots\times J^r g^k\subset W$ 时，$g\in\mathscr{W}$．

2.3 命题． $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 是可分的，即它有一个可数的拓扑基．

证明． 由于 $E^k=E\times\cdots\times E$ 是 Euclid 空间中的一开集．故关于 E^k 的拓扑存在一个可数基 $E_1, \cdots, E_i, \cdots$．设 $\widetilde{E}_1, \cdots, \widetilde{E}_j, \cdots$ 是 E^k 的开子集族，它们是 E_i 的所有有限并．对每个 j，令 $\mathscr{E}_j=\{g\in C^r(M, \mathbb{R}^s): J^r(g)\subset\widetilde{E}_j\}$．显然 $\mathscr{E}_j$ 在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中为开集．设 $\mathscr{W}$ 是 f 在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中的邻域，且 W 为 $J^r(f)$ 的邻域，使得当 $J^r(g)\subset W$ 时 $g\in\mathscr{W}$．由于 $J^r(f)$ 是紧的，故存在由包含在 W 中的开集 E_i 所组成的 $J^r(f)$ 的有限覆盖．设 $\widetilde{E}_j$ 是这些 E_i 的并集．显然 $J^r(f)\subset\widetilde{E}_j\subset W$．因此，$\mathscr{E}_j$ 包含 f 且包含于 $\mathscr{W}$ 之中．这就证明了 $\{\mathscr{E}_1, \cdots, \mathscr{E}_j, \cdots\}$ 是一个关于 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 的拓扑的可数基． □

下面我们证明，每一 C^r 映射可以在 C^r 拓扑中用 C^∞ 映射逼近．

2.4 引理． 设 $f: U\subset\mathbb{R}^m$ 为 C^r 映射，U 为开集．设 $K\subset U$ 为紧集，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 C^∞ 映射 $g: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^s$，使得在 K 上有

$\|f-g\|_r<\varepsilon$.

证明. 考虑在 K 上取值为 1, 在 U 中 K 的某紧[1]邻域之外取值为 0 的冲击函数 $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. 取 $h=\varphi f$, 则在 K 上 $h=f$, 在 U 之外 $h=0$. 由于 h 是 C^r 的, K 为紧集, 故存在 $\delta>0$, 使得

$$\sup\{\|d^j h(u+v)-d^j h(u)\|: u\in K,\ \|v\|<\delta\}<\varepsilon,$$

其中 d^j 表示 j 阶导数, $j=1, \cdots, r$. 令 $\varphi_\delta: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 为, 当 $\|v\|>\delta$ 时 $\varphi_\delta(v)=0$, 且 $\int \varphi_\delta(v)dv=1$ 的冲击函数. 定义 $g: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^s$,

$$g(u)=\int \varphi_\delta(v)h(u+v)dv=\int \varphi_\delta(z-u)h(z)dz,$$

则有
$$d^j g(u)=\int \varphi_\delta(v)d^j h(u+v)dv$$

和
$$d^j g(u)=(-1)^j\int d^j\varphi_\delta(z-u)h(z)dz.$$

由第二个表达式得知 g 是 C^∞ 的. 另一方面, 由第一个表达式, 我们有

$$\begin{aligned}\|d^j g(u)-d^j h(u)\| &= \left\|\int \varphi_\delta(v)d^j h(u+v)dv\right.\\ &\qquad \left.-\int \varphi_\delta(v)d^j h(u)dv\right\|\\ &=\left\|\int \varphi_\delta(v)(d^j h(u+v)-d^j h(u))dv\right\|<\varepsilon, \quad 对\ u\in K.\end{aligned}$$

由于在 K 上 $h=f$, 因此 g 满足我们所要求的条件. □

2.5 命题. 由所有 C^∞ 映射组成的子集在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中稠密.

证明. 设 (x_i, U_i), $i=1, \cdots, k$, 是满足 $x_i(U_i)=B(2)$ 和 $M=\bigcup V_i$ 的局部卡, 其中 $V_i=x_i^{-1}(B(1))$. 取从属于覆盖 $\{V_i\}$ 的单位分解 $\{\varphi_i: M\to\mathbb{R}\}$. 设 $f\in C^r(M, \mathbb{R}^s)$, $\varepsilon>0$. 由上一引理, 给定 $\delta>0$, 存在 C^∞ 类的 $\tilde{g}^i: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^s$, 使得在 $\overline{B(1)}$ 上, $\|f^i-\tilde{g}^i\|_r<\delta$, 其中 $f^i=f\circ x_i^{-1}$. 取 δ 充分小, 则有 $\|\varphi_i f-\varphi_i\tilde{g}^i\circ x_i\|_r<\varepsilon/k$. 因此, $g=\sum\varphi_i\tilde{g}^i\circ x_i$ 是 C^∞ 类的, 且

$$\|f-g\|_r=\left\|\sum(\varphi_i f-\varphi_i\tilde{g}^i\circ x_i)\right\|_r<\varepsilon/k+\cdots+\varepsilon/k=\varepsilon. \qquad □$$

现在考虑闭流形 N. 由 Whitney 定理, 对某个 $s>0$, 可假定

[1] 原文误为 K 的某邻域. ——译者注

N 是 $\mathbb{R}^s$ 的一个闭子流形. 由于 N 是 $\mathbb{R}^s$ 的闭子集, 故 $C^r(M, N)$ 在 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 中是闭的. 因此, 具有由 $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ 诱导的拓扑的 $C^r(M, N)$ 是可分的 Baire 空间.

设 $N_1 \subset \mathbb{R}^{s_1}$, $N_2 \subset \mathbb{R}^{s_2}$ 是两个闭流形. $\Phi: N_1 \to N_2$ 是 C^l 映射, $r \leqslant l \leqslant \infty$. 由 $\Phi_* f = \Phi \circ f$ 定义 $\Phi_*: C^r(M, N_1) \to C^r(M, N_2)$.

2.6 命题. 映射 Φ_* 连续.

证明. 由命题 0.16 的推论 2, 存在 C^l 映射 $\tilde{\Phi}: \mathbb{R}^{s_1} \to \mathbb{R}^{s_2}$, 使得在 N_1 上 $\tilde{\Phi} = \Phi$. 设 (x_i, U_i), $i = 1, \cdots, k$, 是如上所述的 M 中的局部卡. 易见, 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得在 $\overline{B(1)}$ 上, 当

$$\|f \circ x_i^{-1} - g \circ x_i^{-1}\|_r < \delta$$

时, 有 $\|(\tilde{\Phi} \circ f - \tilde{\Phi} \circ g) \circ x_i^{-1}\|_r < \varepsilon$. 因此, 当 $\|f - g\|_r < \delta$ 时,

$$\|\Phi \circ f - \Phi \circ g\|_r = \|\tilde{\Phi} \circ f - \tilde{\Phi} \circ g\|_r < \varepsilon.$$

这就证明了 Φ_* 连续. □

现在设 M 与 N 是两个抽象流形, 且 M 为紧的. 我们可在 $C^r(M, N)$ 上定义 C^r 拓扑. 为此, 只需将 N 嵌入 Euclid 空间 $\mathbb{R}^s$[1] (定理 0.17). 上述命题说明这个拓扑与嵌入无关.

2.7 命题. 由所有 C^∞ 映射组成的子集在 $C^r(M, N)$ 中稠密.

证明. 假设 $N \subset \mathbb{R}^s$. 设 $V \subset \mathbb{R}^s$ 是 N 的一个管状邻域, $\pi: V \to N$ 是对应的投影. 设 $f \in C^r(M, N)$. 由命题 2.5, 我们可以用 C^∞ 映射 $g: M \to \mathbb{R}^s$ 逼近 f. 因此, $\pi \circ g: M \to N$ 是 C^∞ 的, 由于 π_* 连续, 故 $\pi \circ g$ 逼近 f. □

2.8 命题. 由 M 的所有到自身的 C^r 微分同胚组成的集合 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 是 $C^r(M, M)$ 中的开集.

证明. 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$. 我们可以假定 $M \subset \mathbb{R}^s$. 若 $p \in M$, 由反函数定理, 存在 p 在 M 中的邻域 V_p, f 在 $C^r(M, M)$ 中的邻域 $\mathscr{V}_p$, 使得如果 $g \in \mathscr{V}_p$, 则 $g|V_p$ 是微分同胚, 设 $V_{p_1}, \cdots, V_{p_j}$ 是 M 的一个有限子覆盖. 令 $\mathscr{V} = \bigcap_{i=1}^{j} \mathscr{V}_{p_i}$. 如果 δ 是此覆盖的 Lebesgue 数, 则当 $d(p, q) < \delta$, 且 $p \neq q$ 时, 对每个 $g \in \mathscr{V}$, 有 $g(p) \neq g(q)$.

1) $s = 2n + 1$, 其中 n 是 N 的维数. 原书将 s 误为 2.——译者注

另一方面，$\rho=\inf\{d(f(p),f(q)): p, q\in M$ 且 $d(p,q)\geq\delta\}$ 是正的．因此，由缩小 $\mathscr{V}$ 可以假设当 $g\in\mathscr{V}$ 时，g 是一个单射．又因为 g 是一个局部微分同胚，故它是 M 上的微分同胚． □

由上述命题，得知 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 是一可分的 Baire 空间，且所有 C^∞ 微分同胚组成的子集在其中稠密．

最后，考虑紧流形 M 上的 C^r 向量场空间 $\mathscr{X}^r(M)$．假定 $M\subset\mathbb{R}^s$，易见 $\mathscr{X}^r(M)$ 是 $C^r(M,\mathbb{R}^s)$ 的闭子空间，因此，$\mathscr{X}^r(M)$ 是可分的 Baire 空间．我们证明，每个向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 可以用 C^∞ 向量场来逼近．事实上，X 可以用 C^∞ 映射 $Y: M\to TM$ 来逼近．设 $\pi: TM\to M$ 是自然投影．由于 π_* 连续，故 $\pi\circ Y$ 是 C^r 逼近于 $\pi\circ X=id_M$．由命题 2.8，$\varphi=\pi\circ Y$ 是微分同胚．设 $Z=Y\circ\varphi^{-1}$．因为 φ 是 C^∞ 的，且 $\pi\circ Z=id_M$，故 Z 是一 C^∞ 向量场．并且 Z 逼近 X．（见第一章末尾的练习 15.）

§3. 匀断相交性

设 $S\subset N$ 是一 C^r 子流形，$f: M\to N$ 是 C^k 映射，其中 k，$r\geq1$．我们说 f 在点 $p\in M$ 与 S **匀断相交**，如果 $f(p)\notin S$，或者 $df_p(TM_p)+TS_{f(p)}=TN_{f(p)}$．即在 df_p 的作用下，如果 TM_p 的象包含 $TN_{f(p)}$ 的一个子空间，那么这个子空间是 $TS_{f(p)}$ 的补空间．如果在每一点 $p\in M$，f 与 S 匀断相交，则称 f 与 S **匀断相交**，记作 $f\pitchfork S$．注意，若 M 的维数小于 S 的余维数，则当且仅当 $f(M)\cap S=\varnothing$ 时，f 才与 S 匀断相交．

一个有趣的特殊情形是 $f: M\to N$ 为浸没，这时 f 与每个子流形 $S\subset N$ 都匀断相交．我们用下面的方法来定义两个子流形 $S_1, S_2\subset N$ 之间的匀断相交性：S_1 与 S_2 称为匀断相交，如果包含映射 $i: S_1\to N$ 匀断相交于 S_2．

我们知道，每个子流形都局部地是某一正则值的逆象．更严格地说，如果 $q\in S\subset N^n$[1]，则存在 q 在 N 中的邻域 V_q 和 C^r 微分

1) $\dim N^n=n$，S 是 N 的 s 维子流形．——译者注

同胚 $\varphi: V_q\to \mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{n-s}$，使得 $\varphi(S\cap V_q)=\mathbb{R}^s\times\{0\}$. 因此 $S\cap V_q=(\pi_2\circ\varphi)^{-1}(0)$，其中 $\pi_2: \mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{n-s}\to\mathbb{R}^{n-s}$ 是自然投影. 现在设 $f: M\to N$，且设 $U_p\subset M$ 是 p 的一个邻域，满足 $f(U_p)\subset V_q$，其中 $q=f(p)$. 考虑映射 $\pi_2\circ\varphi\circ f|U_p$，如图 16.

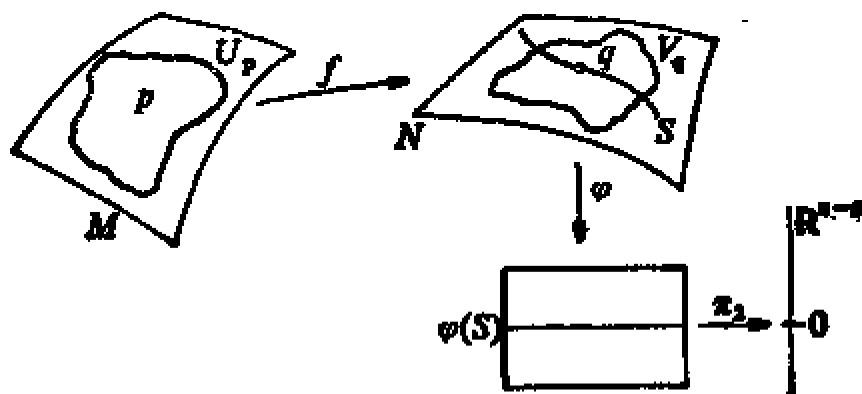


图 16

下面的命题是直接可得的.

3.1 命题. 映射 $f: M\to N$ 在 $p\in f^{-1}(S)$ 与 S 匀断相交当且仅当对如上的某个邻域 U_p，0 是 $\pi_2\circ\varphi\circ f|U_p$ 的一个正则值. □

推论. 设 $f\in C^k(M, N^n)$，S^s 是 N 的一个 C^r 子流形[1]，$k, r\geqslant 1$. 如果 f 与 S 匀断相交，则 $f^{-1}(S)$ 或者为空集，或者为余维数是 $n-s$ 的 C^l 子流形，其中 $l=\min(k, r)$. □

3.2 命题. 如果 M 是紧的，且 $S\subset N$ 为闭集，则 $C^k(M, N)$ 中的所有与 S 匀断相交的映射组成一开子集.

证明. 设 $f\in C^k(M, N)$ 与 S 匀断相交. 对每一 $q\in S$，取邻域 V_q 和微分同胚 $\varphi_q: V_q\to\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{n-s}$，使得 $\varphi_q(S\cap V_q)=\mathbb{R}^s\times\{0\}$. 对每点 $p\in f^{-1}(q)$，考虑满足 $f(\overline{U}_p)\subset V_q$ 的邻域 U_p，以及 $\pi_2\circ\varphi_q\circ f$ 的导数，它在 $\overline{U}_p$ 的每一点是满射. 于是存在邻域 $\mathscr{V}_p(f)\subset C^k(M, N)$，使得对每一 $g\in\mathscr{V}_p$，$\pi_2\circ\varphi_q\circ g$ 在 $\overline{U}_p$ 上与 $\pi_2\circ\varphi_q\circ f$ 相等. 设 $U_{p_1}, \cdots, U_{p_m}$ 是紧集 $f^{-1}(s)$ 的有限子覆盖. 令 $U=U_{p_1}\cup\cdots\cup U_{p_m}$，$\mathscr{V}(f)=\mathscr{V}_{p_1}\cap\cdots\cap\mathscr{V}_{p_m}$. 显然，如果 $g\in\mathscr{V}$，则 g 与 S 在 U 的每一点都匀断相交. 由于 $M-U$ 是紧的，且 $f(U-U)\cap S=\varnothing$，如有必要我们可缩小 $\mathscr{V}$，则对一切 $g\in\mathscr{V}$ 有 $g(M-U)\cap S=$

1) 这里 N 与 N^n 是同一微分流形.——译者注

$\varnothing$. 因此，每一 $g\in\mathscr{V}$ 与 S 匀断相交. 命题得证. □

注意，如果 $S\subset N$ 不是闭的，则命题对 S 的闭子集仍成立. 换句话说，如果 $\tilde{S}\subset S$ 在 N 中是闭的，则在 $f^{-1}(\tilde{S})$ 上与 S 匀断相交的映射 $f: M\to N$ 的集合是 $C^k(M, N)$ 中的开集.

设 Λ, M, N 是流形, 且设 $F: \Lambda\times M\to N$ 是 C^∞ 映射. 对 $\lambda\in\Lambda$, 我们用 $F_\lambda(p)=F(\lambda, p)$ 定义映射 $F_\lambda: M\to N$. 设 $S\subset N$ 是 C^∞ 子流形, 令 $T_S\subset\Lambda$ 是使 F_λ 与 S 匀断相交的所有 λ 组成的点集.

3.3 命题. 如果 $F: \Lambda\times M\to N$ 与 $S\subset N$ 匀断相交，则 T_S 是 Λ 中的剩余集.

证明. 设 $\pi: \Lambda\times M\to\Lambda$ 是自然投影. 由于 F 与 S 匀断相交, 故 $\tilde{S}=F^{-1}(S)$ 是 $\Lambda\times M$ 的子流形, $\pi_S=\pi|\tilde{S}: \tilde{S}\to\Lambda$ 是 C^∞ 映射. 故容易看出当且仅当 λ 是 π_S 的正则值时 F_λ 才与 S 匀断相交. 再由 Sard 定理可得此命题. □

推论 1. 设 $f: M\to\mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 的, $S\subset\mathbb{R}^n$ 为一子流形, 则使得 $f+v$ 与 S 匀断相交的所有向量 $v\in\mathbb{R}^n$ 构成一剩余集.

证明. 由 $F(v, p)=f(p)+v$ 定义的映射 $F: \mathbb{R}^n\times M\to\mathbb{R}^n$ 是一浸没，因此它与 S 匀断相交. 再由命题立刻得到此推论. □

推论 2. 如果 M 是一紧流形，则由所有与闭子流形 $S\subset\mathbb{R}^n$ 匀断相交的映射组成的集合 $T_S\subset C^k(M, \mathbb{R}^n)$ 是开稠的.

证明. 由命题 3.2 可得 T_S 的开性. 稠密性可由推论 1 以及 C^∞ 映射在 $C^k(M, \mathbb{R}^n)$ 的稠密性得到. □

我们强调指出, 命题 3.3 中的流形 Λ, M 与 N 不必是紧的. 还要指出，命题 3.3 及推论 1 中都要求映射和子流形 S 是 C^∞ 的，这是因为在定理证明过程中我们用到了 Sard 定理.

3.4 定理(Thom). 假定 M 是一紧流形, $S\subset N$ 是一闭子流形，则所有与 S 匀断相交的映射 $f\in C^k(M, N)$ 构成一开稠集.

证明. 由于我们已经证明了开性, 剩下只要证明与 S 匀断相交的映射稠密就行了. 取 $f\in C^k(M, N)$. 我们欲证, 对每点 $p\in M$, 存在 p 在 M 中的邻域 U_p 以及 f 在 $C^k(M, N)$ 中的邻域 $\mathscr{V}_p$,

使得在 U_p 中所有与 S 匀断相交的 $g\in\mathscr{V}_p$ 的集合在 $\mathscr{V}_p$ 中是开稠的. 事实上, 如果 $U_{p_1}, \cdots, U_{p_m}$ 是 M 的有限子覆盖, $\mathscr{V}(f)=\mathscr{V}_{p_1}\cap\cdots\cap\mathscr{V}_{p_m}$, 则在 M 的每一点与 S 匀断相交的 $g\in\mathscr{V}$ 的集合是开稠的. 特别, 我们可用与 S 匀断相交的映射逼近 f, 然后再构造这些邻域 U_p 与 $\mathscr{V}_p$. 设 $y: V\to\mathbb{R}^n$ 是围绕 $f(p)$ 的一个局部卡. 取 p 的邻域 U_p, 使得 $f(\overline{U}_p)\subset V$; 取 f 的邻域 $\mathscr{V}_p$, 使得对一切 $g\in\mathscr{V}_p$, $g(\overline{U}_p)\subset V$. 命题 3.2 的证明还说明, 在 $\overline{U}_p$ 上所有与 S 匀断相交的 $g\in\mathscr{V}_p$ 的集合是开的. 至于稠密性的证明, 我们可以先考虑 C^∞ 映射 $g\in\mathscr{V}_p$, 因为 C^∞ 映射在 $C^k(M, N)$ 中稠密. 容易看出, 如果 $v\in\mathbb{R}^n$ 有小范数, 则存在接近于 g 的 $g_v\in\mathscr{V}_p$, 使得在 $\overline{U}_p$ 上, $y\circ g_v=y\circ g+v$, 在 $\overline{U}_p$ 的一邻域之外 $g_v=g$. 由命题 3.3 的推论 1, 存在具小范数的 $v\in\mathbb{R}^n$, 使得 $y\circ g+v$ 与 $y(s)\subset\mathbb{R}^n$ 匀断相交. 因此, g_v 在 $\overline{U}_p$ 上与 S 匀断相交. 定理证毕. □

注. 在定理 3.4 中, 我们要求 S 是 C^∞ 子流形. 然而, 定理的结果对 C^r 类 $(r\geqslant 1)$ 的 S 也成立. 事实上, 在上面的证明中, 只需取 C^r 局部卡 y 使得 $y(S)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 子流形, 然后用使得在 U_p 上 $y\circ\tilde{g}$ 为 C^∞ 映射的 $\tilde{g}$ 来逼近 g 即可.

§4. 结构稳定性

微分方程的定性研究就是研究微分方程的轨道空间的几何表示. 因此, 自然要问, 两个轨道空间什么时候才有相同的表示, 相同的定性特征. 这意味着在微分方程之间建立一种等价关系. 获得轨道的几何结构的等价关系就是下面我们即将定义的拓扑等价.

设 $\mathscr{X}^r(M)$ 是在紧流形 M 上具 C^r 拓扑的 C^r 向量场空间, $r\geqslant 1$. 两个向量场 $X, Y\in\mathscr{X}^r(M)$ 称为是**拓扑等价**的, 如果存在同胚 $h: M\to M$, 它将 X 的轨道变为 Y 的轨道, 且保持定向. 后面的条件意味着, 如果 $p\in M$, $\delta>0$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $0<t<\delta$ 和某个 $0<t'<\varepsilon$, 我们有 $hX_t(p)=Y_{t'}(h(p))$. 称 h 为 X 与 Y

之间的拓扑等价．这样，我们在 $\mathscr{X}^r(M)$ 上就定义了等价关系．另一个较强的关系是向量场的流的共轭．两个向量场 X 与 Y 称为是共轭的，如果存在保持参数 t 的拓扑等价 h，亦即对一切 $p\in M$ 和一切 $t\in\mathbb{R}$，有 $hX_t(p)=Y_th(p)$．

下面的命题说明对于两个等价的向量场，它们的轨道空间的某些定性特征必相同，其证明是直接可得的．

4.1 命题．设 h 是 $X, Y\in\mathscr{X}^r(M)$ 之间的一个拓扑等价，则

(a) $p\in M$ 是 X 的奇点当且仅当 $h(p)$ 是 Y 的奇点，

(b) 向量场 X 过 p 的轨道 $\mathscr{O}_X(p)$ 是闭的当且仅当 $\mathscr{O}_Y(h(p))$ 是闭的，

(c) $\mathscr{O}_X(p)$ 的 ω 极限集在 h 作用下的象是 $\mathscr{O}_Y(h(p))$ 的 ω 极限集．对 α 极限集有类似的结论．

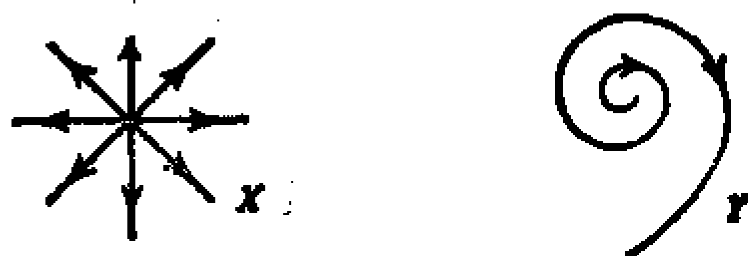


图 17

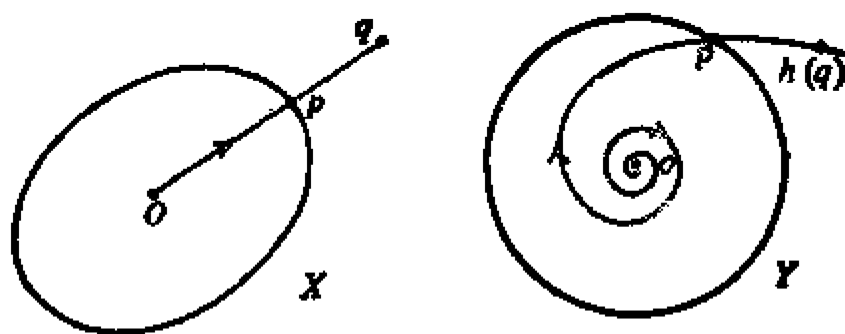


图 18

例 1．在 $\mathbb{R}^2$ 上考虑由

$$X(x, y)=(x, y),\ Y(x, y)=(x+y,\ -x+y)$$

定义的线性向量场，它们对应的流是

$$X_t(x, y)=e^t(x, y)$$

与 $$Y_t(x, y)=e^t(x\cos t+y\sin t,\ -x\sin t+y\cos t).$$

我们在 $\mathbb{R}^2$ 中构造使 X_t 与 Y_t 共轭的同胚 h. 由于 0 是 X 与 Y 的唯一奇点, 故必须取 $h(0)=0$. 易见, 单位圆 S^1 与 X 和 Y 都匀断相交. 此外, X 和 Y 的所有轨线除 0 以外都与 S^1 相交. 对 $p\in S^1$, 我们定义 $h(p)=p$. 如果 $q\in\mathbb{R}^2-\{0\}$, 则存在唯一的 $t\in\mathbb{R}$, 使得 $X_t(q)=p\in S^1$. 令 $h(q)=Y_{-t}(p)=Y_{-t}X_t(q)$. 立刻可知 h 连续, 且在 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上有连续逆. h 和 h^{-1} 在 0 点的连续性可由 X 与 Y 的流来检验.

例 2. 设 X 与 Y 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性向量场, 它们关于标准基底的矩阵是

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 Y 的所有轨道都是闭的, 而 X 却不然, 故这两个向量场不等价.

一个向量场是结构稳定的, 如果它的轨道的拓扑性态在此向量场的微小扰动下是不变的. 严格地说, $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是**结构稳定的**, 如果在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中存在 X 的邻域 $\mathscr{V}$, 使得每个 $Y\in\mathscr{V}$ 都拓扑等价于 X.

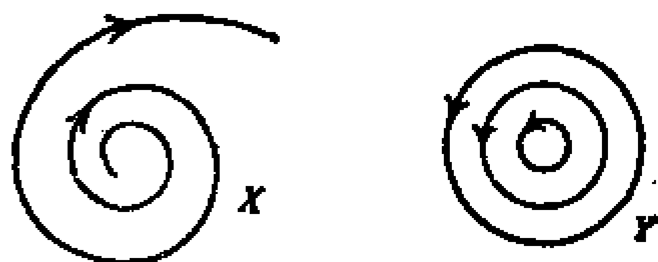


图 19

任何流形上的零向量场显然是不稳定的. 另一方面, 例 1 中考虑的线性场 $X(p)=p$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的线性向量场空间中是结构稳定的. 为了诱导在后面几章才介绍的稳定性的必要条件, 我们再给出几个不稳定向量场的例子.

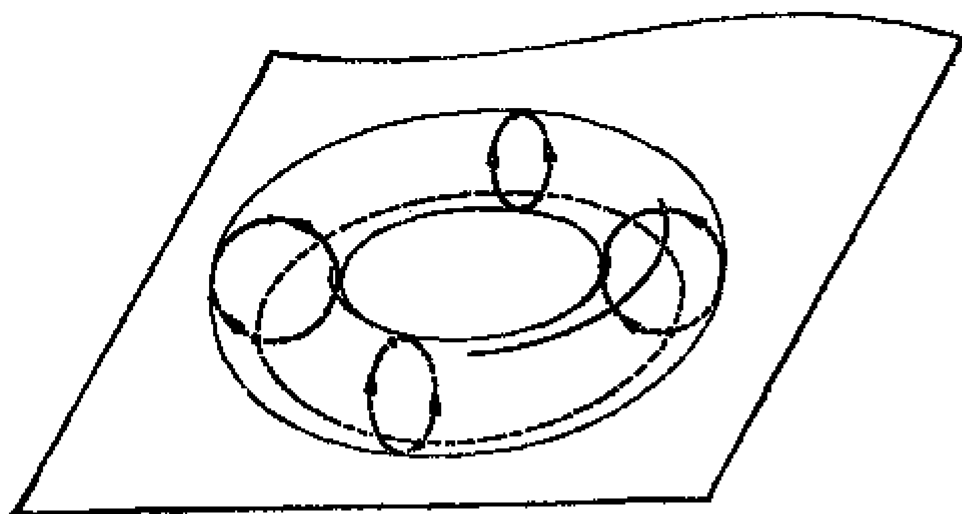


图 20

例 3. 如第一节例 2, 考虑环面 T^2 上的有理向量场. 这个向量场在 $\mathscr{X}^r(T^2)$ 中是不稳定的. 事实上, 这个场的所有轨道都是闭的, 而它却可用不具任何闭轨的无理向量场来逼近. 实际上, 在(紧)二维流形上, 每个具无穷多条闭轨的向量场都是不稳定的. 这是因为我们可以用只具有限多条闭轨的向量场来逼近它, 这将在第四章证明.

例 4. 设 π 是以通常方式嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的环面 T^2 的水平切平面. 因此 π 与 T^2 交于"纬线"或水平圆周 (如图 20). 设 $f: T^2 \to \mathbb{R}$ 是将 T^2 上的每一点对应到它同 π 之间的距离的函数. 取 $X = \operatorname{grad} f$. 则 T^2 的包含在 π 中的整条纬线都是 X 的奇点, 现在令 $X' = \operatorname{grad} f'$, f' 是环面上的点到平面 π' 之间的距离, π' 为 π 的一个小旋转. 由于只有四个平行于 π' 的平面切于 T^2, 且每一平面只切 T^2 于一点, 因此 X' 只有四个奇点, 从而 X 不等价于 X', 故 X 不稳定. 我们将在第二章中指出, 每个具有无穷多个奇点的向

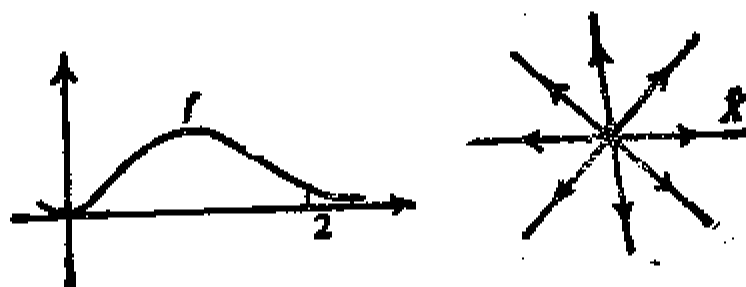


图 21

量场都是不稳定的．这是因为它可以用具有限个奇点的另一向量场来逼近．

例 5．现在我们描述 S^2 上的一个不稳定向量场，虽然它拓扑等价于稳定的北极-南极向量场(第一节例 1)．设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是满足下列条件的 C^∞ 映射

$$f(t)>0,\quad 当\ t\neq 0\ 时;$$

$$f(t)=\frac{1}{t},\quad 当\ t>1\ 时;$$

$$f(0)=df/dt(0)=\cdots=d^rf/dt^r(0)=\cdots=0.$$

考虑由 $\widetilde{X}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=(rf(r)\cos\theta,\ rf(r)\sin\theta)$ 定义的 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场 $\widetilde{X}$．这是一个射线场，原点是其唯一奇点，$d\widetilde{X}(0)=0$，且当 $\|p\|>1$ 时，$\|\widetilde{X}(p)\|=1$．

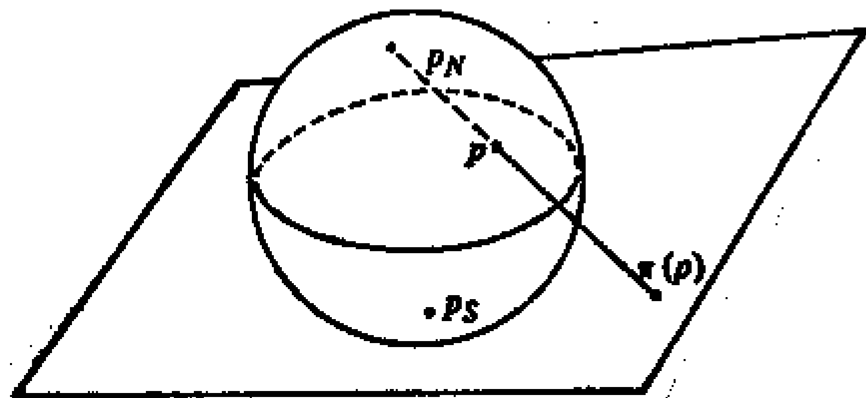


图 22

设 $\pi: S^2-\{p_N\}\to\mathbb{R}^2$ 是球极投影，如图 22 所示．定义 S^2 上的向量场 X 如下：当 $p\neq p_N$ 时，$X(p)=d\pi^{-1}_{\pi(p)}\widetilde{X}(\pi(p))$；$X(p_N)=0$．易见，$X$ 是 C^∞ 向量场．具有两个奇点 p_N 与 p_S．我们指出，X 与 § 1 例 1 中北极-南极向量场之间的拓扑等价是恒等映射．下面证明，存在一个含有一条闭轨的向量场 C^r 逼近 X．设 $\widetilde{Y}$ 是用 $\widetilde{Y}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=(rl(r)\cos\theta+rg(r)\sin\theta,\ -rg(r)\cos\theta+rl(r)\sin\theta)$ 定义的 $\mathbb{R}^2$ 上的一个向量场，其中 $l,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 映射，如图 23 所示．

$$l(0)=l(a)=0;\ g(0)=g(t)=0,\quad 当\ t\geqslant C\ 时,$$

$$l(t)=1/t,\quad 当\ t\geqslant 1\ 时;\quad g(t)>0,\quad 当\ 0<t<c\ 时,$$

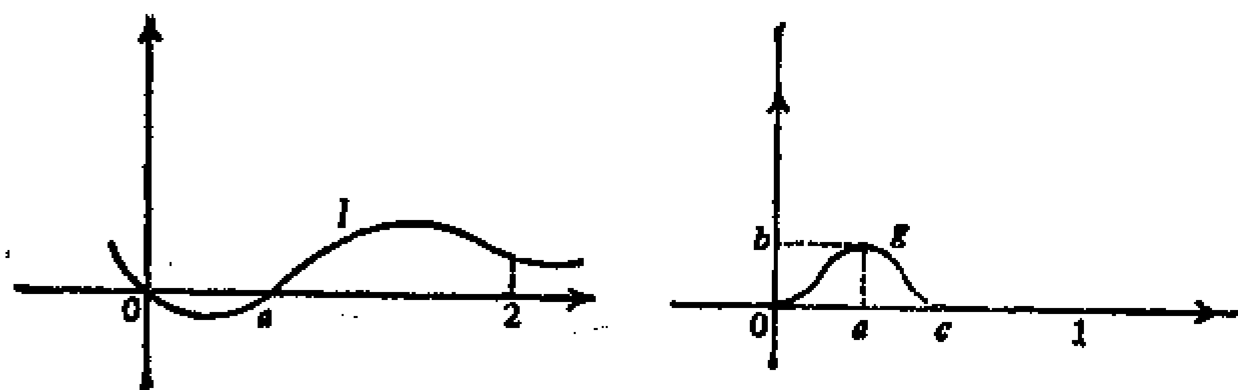


图 23

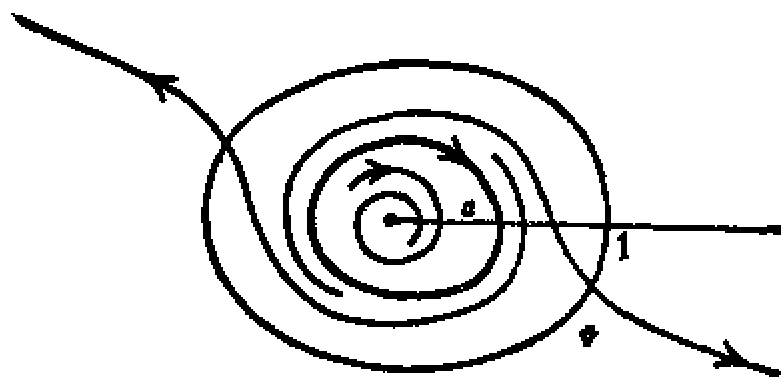


图 24

$$l(t)<0, \quad \text{当 } 0<t<a \text{ 时}; \quad g'(a)=0,$$

$$l(t)>0, \quad \text{当 } t>a \text{ 时}; \quad g(a)=b.$$

以原点为中心，a 为半径的圆 S_a 是 $\tilde{Y}$ 的闭轨，这是因为 $\tilde{Y}$ 在 S_a 的每一点都与 S_a 相切．在单位圆盘之外，$\tilde{Y}=\tilde{X}$．因此 $\tilde{Y}$ 在 S^2 上定义了向量场 Y，它以南极、北极为其"吸引"奇点，且有"排斥"闭轨道 $\gamma=\pi^{-1}(S_a)$．如果我们选 l 去 C^r 逼近 f，用 g 去 C^r 逼近零函数，则 Y 就 C^r 逼近 X．由于 X 不是拓扑等价于 Y 的，故 X 在 $\mathscr{X}^r(S^2)$ 中不是结构稳定的．

我们强调指出，在这些例子中，只有例 5 的向量场等价于稳定向量场．其它例子的不稳定的基本原因是向量场在奇点 p_S 的导数是退化的．

一般地，证明向量场的稳定性是一个棘手的问题．这方面的许多例子将在第四章中给出．下面我们来分析 S^1 上的向量场的稳定性．这种情况非常简单．但它可使我们对动力系统理论的一般目的有所了解．

设 X^0 是 S^1 上两个单位向量场的一个．任一 $X\in\mathscr{X}^r(S^1)$ 可用唯一方式表为 $X(p)=f(p)X^0(p)$, $p\in S^1$, $f\in C^r(S^1, \mathbb{R})$．显然 $X(p)=0$ 当且仅当 $f(p)=0$．正如我们已经注意到的，任给一紧集 $K\subset S^1$，存在 $f\in C^r(S^1, \mathbb{R})$，使得 $f^{-1}(0)=K$．因此 K 是 $X=fX^0$ 的奇点集．由于拓扑等价保持奇点不变，所以，向量场的等价类的基数至少不少于 S^1 的紧子集的同胚类的基数．这说明不可能对 S^1 上的所有向量场的轨道结构进行描述与分类．因此，我们自然要限制在 $\mathscr{X}^r(S^1)$ 的某剩余子集上进行讨论，如果能在某开稠子集上进行分类当然更好．

$X\in\mathscr{X}^r(S^1)$ 的奇点 p 是**非退化的**（或**双曲的**），如果 $dX(p)\neq 0$，即 $df(p)\neq 0$，其中 $X=fX^0$．如果 $df(p)<0$，则 p 是一**汇**（或吸引奇点），如果 $df(p)>0$，则 p 是一源（或排斥奇点．设 $G\subset\mathscr{X}^r(S^1)$ 是其奇点都是双曲的所有向量场构成的子集．由于这些奇点都是孤立的，因此其数目是有限的（可能为零!）．我们断言，G 是一开稠集．事实上，设 $X=fX^0$，$\tilde{f}: S^1\to S^1\times\mathbb{R}$ 由 $\tilde{f}(p)=(p, f(p))$ 定义．显然 $X\in G$ 当且仅当 $\tilde{f}$ 与 $S^1\times\{0\}$ 匀断相交但是使得 $\tilde{f}$ 与 $S^1\times\{0\}$ 匀断相交的所有 $f\in C^r(S^1, \mathbb{R})$ 组成的集合是开的．此集合也是稠密的，这是因为对每一 f，使得 $\tilde{f}+v$ 与 $S^1\times\{0\}$ 匀断相交的 $v\in\mathbb{R}$ 的集合是剩余集，因此我们可以选取 v 充分小，使得 $(f+v)X^0\in G$．

如果 $X\in G$, $X=fX^0$，从 $f: S^1\to\mathbb{R}$ 的图象看到，X 的汇与源绕 S^1 而行必须交替排列．特别，奇点的数目是偶数个、由此得知，如果 $X, Y\in G$ 有相同个数的奇点，则 X 与 Y 拓扑共轭．事实上，设 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_s, b_s$ 依次是 S^1 上 X 的汇与源．类似地，设 $a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \cdots, a'_s, b'_s$ 依次是 Y 在 S^1 上的汇与源．定义 $h(a_i)=a'_i$, $h(b_i)=b'_i$．选取点 $p_i\in(a_i, b_i)$, $q_i\in(b_i, a_{i+1})$, $p'_i\in(a'_i, b'_i)$ 和 $q'_i\in(b'_i, a'_{i+1})$．定义 $h(p_i)=p'_i$, $h(q_i)=q'_i$．如果 $p\in(a_i, b_i)$，则存在唯一的 $t\in\mathbb{R}$，使得 $X_t(p)=p_i$，定义 $h(p)=p'_i$, $h(q_i)=q'_i$．如果 $p\in(a_i, b_i)$，则存在唯一的 $t\in\mathbb{R}$，使得 $X_t(p)=p_i$; 定义 $h(p)=Y_{-t}(p'_i)=Y_{-t}hX_t(p)$，并对 (b_i, a_{i+1}) 中的点作类

似的讨论．现在，明显看出，h 是使 X 的流与 Y 的流共轭的同胚．

如果 X 没有奇点，则 X 只有一条轨道，就是整个 S^1．如果 $X=fX^0$，则在 S^1 上或者 $f>0$，或者 $f<0$．如果 $f>0$，则 X 与 X^0 之间的拓扑等价是恒等映射．如果 $f<0$，我们就取反向同胚作为我们的拓扑等价．最后，我们断言，如果 $X\in\mathscr{X}^r(S^1)$ 是稳定的，则 $X\in G$．首先，我们注意到 X 的奇点的数目是有限的，这是因为 G 是稠密的，因此 X 必须与 X 附近的向量场 $Y\in G$ 等价．我们让读者证明，这些奇点都是双曲的；如若不然，我们可以扰动 X 以增加奇点的数目，而这与 X 是稳定的假设矛盾．因此，$X\in\mathscr{X}^r(S^1)$ 是稳定的当且仅当 $X\in G$．从而 $\mathscr{X}^r(S^1)$ 中的结构稳定向量场构成一个开稠集．我们已经看到，对它可以进行分类．

微分方程几何理论的发展自然导致对微分同胚的平行研究．下面我们介绍微分同胚的轨道结构研究的某些基本概念．

设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$．点 $p\in M$ 的**轨道**为集合 $\mathscr{O}(p)=\{f^n(p):n\in\mathbb{Z}\}$．当 $\mathscr{O}(p)$ 为有限时，就说 p 是**周期点**，而称满足 $f^n(p)=p$ 的最小整数 $n>0$ 为 p 的**周期**．如果 $f(p)=p$，就说 p 是一个**不动点**．当存在整数序列 $n_i\to\infty$，使得 $f^{n_i}(p)\to q$ 时，就称点 q 属于 p 的 ω **极限集** $\omega(p)$．如果 $x\in\mathscr{O}(p)$，则 $\omega(x)=\omega(p)$．而且 $\omega(p)$ 是非空的，闭的不变集．**不变**即 $\omega(p)$ 是 f 的轨道的并集．对周期点 p 有 $\omega(p)=\mathscr{O}(p)$．因此，如果 p 的周期大于 1，$\omega(p)$ 就不连通了．类似地，我们将 p 的 α **极限集**定义为 f^{-1} 的 ω 极限集．上述关于 $\omega(p)$ 的性质对于 $\alpha(p)$ 也成立．

两个微分同胚的轨道结构的等价性可用共轭表示．$f,g\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 之间的**共轭**是一个同胚 $h:M\to M$，它满足关系 $h\circ f=g\circ h$．因而，对任意整数 n，有 $h\circ f^n=g^n\circ h$．因此，如果 $q=h(p)$，则 $h(\mathscr{O}_f(p))=\mathscr{O}_g(q)$．这就是说，$h$ 将 f 的轨道变为 g 的轨道．特别，它将周期点变为具相同周期的周期点．$h(\omega_f(p))=\omega_g(q)$ 与 $h(\alpha_f(p))=\alpha_g(q)$ 也成立．

例 6. 在 $\mathbb{R}$ 中考虑两个线性收缩 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 与 $g(x)=\frac{1}{3}x$. 我们证明 f 与 g 共轭. 取坐标为 $a>0$, $b<0$ 的两点, 并考虑区间 $[f(a), a]$, $[b, f(b)]$ 与 $[g(a), a]$, $[b, g(b)]$. 定义同胚

$$h: [f(a), a]\cup[b, f(b)]\to[g(a), a]\cup[b, g(b)],$$

使得
$$h(a)=a,\ h(b)=b,\ h(f(a))=g(a)$$
以及
$$h(f(b))=g(b).$$
对每一点 $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, 存在整数 n, 使得 $f^n(x)\in[f(a), a]\cup[b, f(b)]$. 令 $h(x)=g^{-n}hf^n(x)$, $h(0)=0$. 容易看出, h 的定义是合理的, 且是 f 与 g 之间的共轭. 另一方面, 收缩 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 与 $g(x)=-\frac{1}{3}x$ 不共轭.

由这段论述, 我们也可以看到, $\mathbb{R}$ 的两个收缩当且仅当它们同时保持 $\mathbb{R}$ 的定向或同时与 $\mathbb{R}$ 的定向相反时才共轭.

例 7. $\mathbb{R}^2$ 的两个线性变换 $f(x, y)=\left(\frac{1}{2}x, 2y\right)$ 与 $g(x,y)=\left(\frac{1}{3}x, 4y\right)$ 是共轭的. 类似于例 6, 我们可以构造 $f|\mathbb{R}\times\{0\}$ 与 $g|\mathbb{R}\times\{0\}$ 之间的共轭 h_1, 以及 $f|\{0\}\times\mathbb{R}$ 与 $g|\{0\}\times\mathbb{R}$ 之间的共轭 h_2. f 与 g 之间的共轭由 $h(x, y)=(h_1(x), h_2(y))$ 给出.

例 8. 由例 2 中的向量场 X 与 Y 在时间 $t=1$ 诱导的线性变换 X_1, Y_1 不共轭. 这只需注意到 Y_1 有不变的同心圆族, 而 X_1 却没有就够了.

共轭自然导致微分同胚的结构稳定性概念. $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 称为是**结构稳定的**, 如果存在 f 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{V}$, 使得任一 $g\in\mathscr{V}$ 共轭于 f.

恒等映射显然是不稳定的. 由这一节的例 3、例 4 与例 5 中的向量场 X 在时刻 $t=1$ 诱导的微分同胚也都是不稳定的.

例 9. 我们取一个稳定的且有奇点的向量场 $X\in\mathscr{X}^r(S^1)$. 我们已经证明 X 有偶数个交替排列的汇与源 a_1, b_1, a_2, b_2, $\cdots$, a_s, b_s. 选取点 $p_i\in(a_i, b_i)$ 与 $q_i\in(b_i, a_{i+1})$. 现在考虑由 X 在时刻

$t=1$ 诱导的微分同胚 $f=X_1$. 我们证明，$f\in \mathrm{Diff}^r(S^1)$ 是结构稳定的. 我们知道，f 在 $[q_{i-1}, p_i]$ 上是具不动点 a_i 的收缩，在 $[p_i, q_i]$ 上是具不动点 b_i 的扩张. 如果 g 是 C^r 逼近 f，则 g 在 $[q_{i-1}, p_i]$ 上是具有一个与 a_i 接近的不动点 $\tilde{a}_i$ 的收缩，而且 g 在 $[p_i, q_i]$ 上是具有一个与 b_i 接近的不动点 $\tilde{b}_i$ 的扩张，令 $h(a_i)=\tilde{a}_i$, $h(b_i)=b_i'$, $h(p_i)=p_i$, $h(q_i)=q_i$, $h(f(p_i))=g(p_i)$ 以及 $h(f(q_i))=g(q_i)$. 定义 h 为从区间 $[p_i, f(p_i)]$ 到 $[p_i, g(p_i)]$ 上，及从 $[q_i, f(q_i)]$ 到 $[q_i, g(q_i)]$ 上的任一同胚. 然后将 h 如例 6 中那样延拓到 $[a_i, b_i]$ 和 $[b_{i-1}, a_i]$ 上去. 我们就得到了 f 与 g 之间的共轭. 这就证明了 f 是结构稳定的.

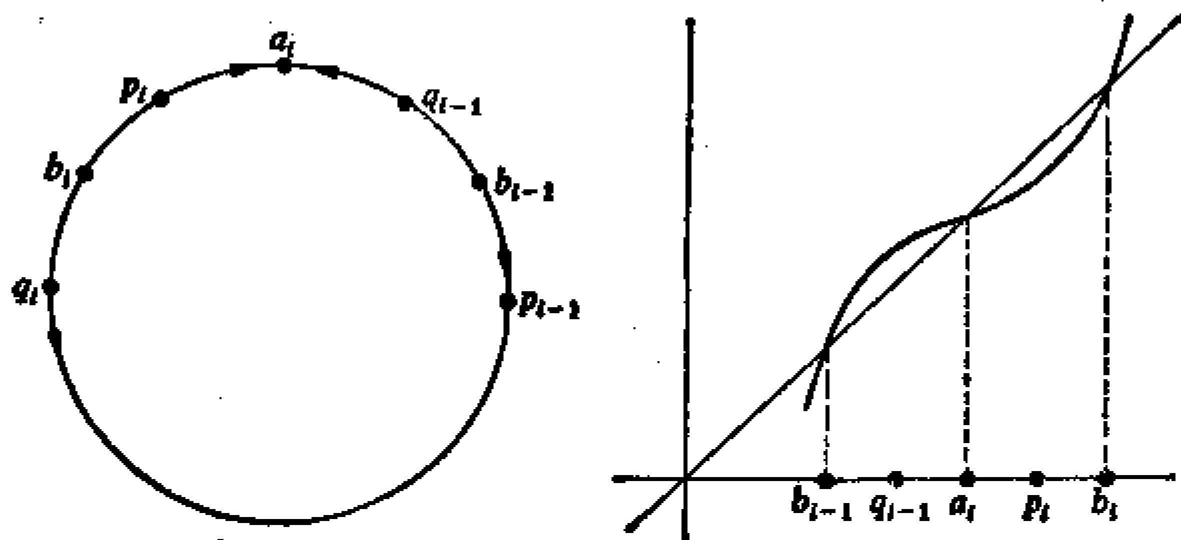


图 25

我们着重指出，$\mathrm{Diff}^r(S^1)$ 中稳定的微分同胚构成一开稠集. 这个结果的证明相当复杂. 我们将在第四章第四节中进行. 还得指出，在上面的例子中，我们从 $\mathscr{X}^r(S^1)$ 中的稳定向量场开始，并证明它在时刻 $t=1$ 诱导的微分同胚在 $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ 中是稳定的. 下面的例子说明这并不是永远可能的.

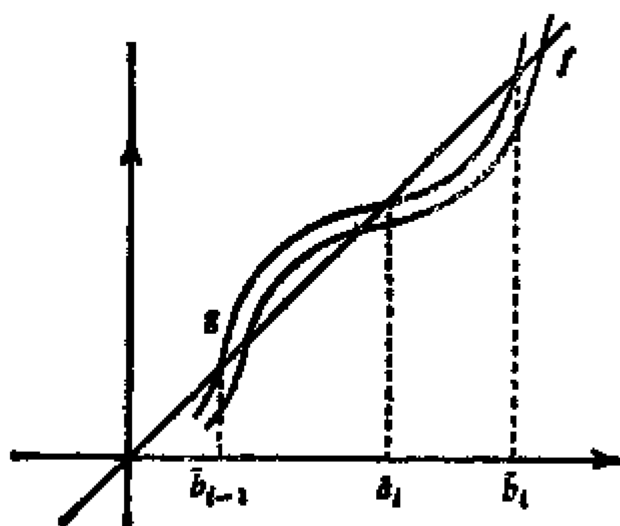


图 26

例 10. 在 S^1 上考虑单位向量场 X^0. 则 S^1 是 X^0 的周期为 2π 的闭轨. 在时刻 $t=1$ 诱导的微分同胚 $f=X_1^0$ 是一无理旋转. 对每一点 $p\in S^1$, 轨道 $\mathcal{O}_f(p)$ 是稠密的. 为了看出 f 是不稳定的, 我们以 $g=X_t^0$ 逼近 f, 此处 t 接近于 1, 且 $t/2\pi$ 为有理数. 每一轨道 $\mathcal{O}_g(p)$ 都是周期的, 因此 f 不共轭于 g.

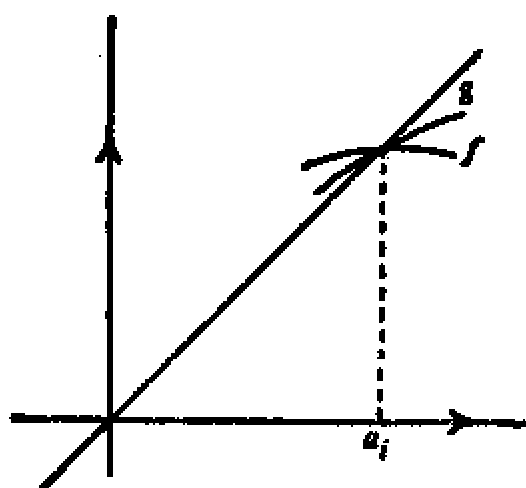


图 27

现在来说明为什么我们用同胚而不用微分同胚来定义共轭. 再考虑例 9 中的微分同胚 f. 我们已经看到, f 是结构稳定的: 如果 g 是 C^r 逼近 f 的, 则存在 S^1 的同胚 h, 就得 $h\circ f=g\circ h$. 为了构造 h, 我们首先指出, 对 f 的每个汇 a_i, 有接近于 a_i 的 g 的汇 a_i'. 对源有同样结果. 令 $h(a_i)=a_i'$. 容易看出, 我们可以选取接近于 f 的 g, 使得 $a_i'=a_i$, 但 $g'(a_i)\neq f'(a_i)$. 现在假定 h 是一微分同胚, 则有 $h(a_i)=a_i$, $h'(a_i)\cdot f'(a_i)=g'(a_i)\cdot h'(a_i)$, 这就导致 $f'(a_i)=g'(a_i)$, 但这与我们的假设矛盾. 因此, 如果我们要求共轭是微分同胚, f 在 $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ 中就不可能是稳定的了. 类似地, 我们可以证明没有一个具有不动点或周期点的 $f\in\mathrm{Diff}^r(S^1)$ 是稳定的. 这说明我们不应该在共轭上加进可微性条件. 类似地, 对于向量场之间的拓扑等价, 如果我们要求等价映射是可微的话, 则没有一个具奇点或闭轨的向量场是稳定的. 它的证明比较复杂, 见第二章练习 13, 也可看第三章练习 5.

练　　习

1. 证明球面 S^2 上的每个 C^1 向量场至少有一个奇点.

2. 两个向量场 X, $Y\in\mathscr{X}^r(M)$ 称为是可交换的, 如果对一切 $p\in M$ 与 $s, t\in\mathbb{R}$, 有 $X_s(Y_t(p))=Y_t(X_s(p))$. 试证如果 X, $Y\in\mathscr{X}^1(S^2)$ 可交换, 则它们有公共的奇点(E. Lima).

3. 设 $X=(P, Q)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场, 其中 P 与 Q 是二次多项式. 设 γ

是 X 的一条闭轨，$D\subset\mathbb{R}^2$ 是 γ 所围的圆盘．求证 X 在 D 中有唯一奇点．

4．设 $X\in\mathfrak{X}^1(M^2)$，$F\subset M^2$ 是使得 $X_t(F)\subset F$(对一切 $t\geqslant 0$) 同胚于柱面的区域．假设 X 在 F 中有有限个奇点．求证点 $p\in F$ 的轨道的 ω 极限集或者为一条闭轨，或者由一些奇点和其 ω 极限集与 α 极限集为奇点的正则轨道所组成．

5．设 $F\subset M^2$ 是与 Möbius 带同胚的区域．$X\in\mathfrak{X}^1(M^2)$ 是使得对一切 $t\geqslant 0$ 有 $X_t(F)\subset F$ 的向量场．如果 X 在 F 中有有限个奇点，则 $p\in F$ 的轨道的 ω 极限集或者为闭轨，或者为由一些奇点和其 ω 极限集与 α 极限集是奇点的正则轨道所组成．

6．设 γ 是向量场 $X\in\mathfrak{X}^r(M^2)$ 的一条孤立闭轨．试证存在 γ 的一个邻域 V，使得对 $p\in V$，或者 $\alpha(p)=\gamma$，或者 $\omega(p)=\gamma$．

7．$X\in\mathfrak{X}^r(M^2)$的一条闭轨 γ 称为是吸引的，如果存在 γ 的一个邻域 V，使得对一切 $t\geqslant 0$ 以及一切 $p\in V$，有 $X_t(p)\in V$，且 $\omega(p)=\gamma$．试证如果 X 有一条吸引闭轨，则充分接近于 X 的每个向量场 Y 也有闭轨．

8．设 X 是射影平面上的 C^1 向量场、试证如果 X 有有限个奇点，则一条轨道的 ω 极限集或者是闭轨，或者是由一些奇点和其 ω 极限集与 α 极限集为奇点的正则轨道所组成．

9．设 X 是环面 T^2 上生成无理流 X_t 的向量场，试证，给定 $n\in\mathbb{N}$ 与 $\varepsilon>0$，存在恰好有 n 个闭轨的向量场 Y，使得 $\|Y-X\|_r<\varepsilon$．

10．向量场 $X\in\mathfrak{X}^r(M)$ 的一个环[1]是一系列奇点 $p_1, \cdots, p_s$, $p_{s+1}=p_1$ 以及满足 $\alpha(\gamma_i)=p_i$ 和 $\omega(\gamma_i)=p_{i+1}$ 的正则轨道 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 所组成．设 $X\in\mathfrak{X}^r(S^2)$，$r\geqslant 1$，满足下列性质：

(1) X 有有限个奇点；

(2) 如果 $p\in S^2$ 是 X 的奇点，则或者 p 是源，或者满足 $\alpha(\gamma)=p$ 的轨道 γ 的集合是有限集．试证，对任一轨道 γ

(a) 如果 $\omega(\gamma)$ 包含的奇点多于一个，则 $\omega(\gamma)$ 含有一个环；

(b) 如果 p_1 和 p_2 是含于 $\omega(\gamma)$ 的奇点，则存在一个含有 p_1 与 p_2 的环．

11.A．设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是一可加群．试证，如果 G 是闭的，则对某个 k 和满足 $k+l\leqslant n$ 的 l，G 同构于 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{Z}^l$．

提示：(a) 证明，如果 G 是离散的，则它同构于 $\mathbb{Z}^l$，即存在向量 $v_1, \cdots, v_l\in\mathbb{R}^n$，使得 $G=\left\{\sum\limits_{i=1}^{l} n_i v_i;\ n_i\in\mathbb{Z}\right\}$．

(b) 证明，如果 G 不是离散的，则它包含一条经过原点的直线．

(c) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是包含在 G 中的最大维数的子空间．设 $E^\perp$ 是 E 的直交

1) 环通常称为奇闭轨道．——译者注

补．证明 $G=E\oplus(E^{\perp}\cap G)$，且 $E^{\perp}\cap G$ 是 $E^{\perp}$ 的离散子群．

11.B．设 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in\mathbf{R}^n$．$G=\{l\alpha+m; l\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{Z}^n\}$．假设 α 的坐标与整数无关，即如果 $\langle m, \alpha\rangle=\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i=0$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $m=0$．试证 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密．

提示：(a) 设 $\pi: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n-1}$ 是投影，$\pi(x_1, \cdots, x_n)=(x_1, \cdots, x_{n-1})$．$\overline{G}$ 是 G 的闭包，由归纳法假设 $\pi(\overline{G})=\mathbf{R}^{n-1}$．

(b) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是包含在 $\overline{G}$ 中的最大维数的子空间．则或者 E 的维数是 $n-1$，或者是 n，且 E 包含向量 α．

(c) 设 $E_{ij}=\{x; x_k=0$，如果 $k\neq i, j\}$．证明 $E_{ij}\cap E$ 是 E_{ij} 中具有理数斜率的直线．再推证 E 包含 $n-1$ 个具整数坐标的线性无关向量．这些向量的向量积是与 E 垂直的具整数坐标的向量．

11.C．在环面 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$ 上找一个 C^∞ 向量场的例子，使得它的所有轨道在 T^n 中稠密．

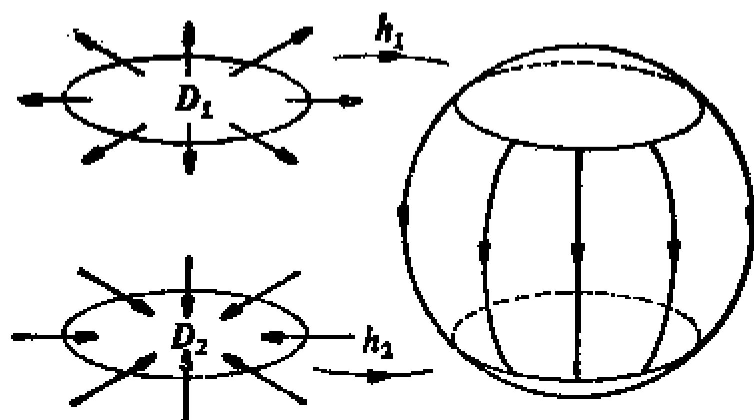


图 28

12．对 $i=1, 2$，设 X^i 是定义在圆盘 $D_i\subset\mathbf{R}^2$ 的一个邻域上的 C^∞ 向量场．假设 X^i 与 D_i 的边界匀断相交，且 X^1 的方向指向 D_1 的外部，X^2 的方向指向 D_2 的内部．证明在 S^2 上存在 C^∞ 向量场 X，以及嵌入 $h_i: D_i\to S^2$，使得

(1) $h_1(D_1)\cap h_2(D_2)=\varnothing$；

(2) $dh_i(p)\cdot X^i(p)=X(h_i(p))$，对一切 $p\in D_i$；

(3) 如果 $p\in h_1(C_1)$，则 p 的 ω 极限集包含在 $h_2(D_2)$ 之中．

13．设 X^1，X^2 分别是维数相同的流形 M_1，M_2 上的两个 C^∞ 向量场，$D_i\subset M_i$ 是两个圆盘，X^i 与 D_i 的边界 C_i 匀断相交，$i=1, 2$．X^1 的方向指向 D_1 的外部，X^2 的方向指向 D_2 的内部．证明在流形 M 上存在 C^∞ 向量场 X，以及嵌入 $h_i: M_i-D_i\to M$，使得

(1) $h_1(M_1-D_1)\cap h_2(M_2-D_2)=\varnothing$；

(2) $dh_t(p)\cdot X^t(p)=X(h_t(p))$;

(3) 如果 $p\in h_1(C_1)$，则 p 的 α 一极限集包含在 $h_2(M_2-D_2)$ 之中.

14．设 X 是柱面 $S^1\times[0, 1]$ 上的平行场 $\partial/\partial t$. 用一无理旋转 $R: S^1\times\{0\}\to S^1\times\{1\}$，将 $S^1\times\{0\}$ 与 $S^1\times\{1\}$ 等同，设 M 是 $S^1\times[0, 1]$ 上由这个等价关系所得的商空间。$\pi: S^1\times[0, 1]\to M$ 为商映射. 证明

(a) 存在 M 上的流形结构，使得在 M 上 π 是一局部微分同胚，π_*X 是 M 上的 C^∞ 向量场.

(b) 存在微分同胚 $h: M\to T^2$，使得，若 $Y=h_*Y$，则 Y_t 是一无理流.

15．设 M, N 与 P 是流形，且 M 与 N 紧. 证明

(a) 映射 $\mathrm{comp}\, C^r(M, N)\times C^r(N, P)\to C^r(M, P)$: $\mathrm{comp}(f, g)=g\circ f$ 连续;

(b) 映射 i: $\mathrm{Diff}^r(M)\to\mathrm{Diff}^r(M)$: $i(f)=f^{-1}$ 连续.

16．设 M 与 N 是流形，且 M 紧，设 $S\subset M\times N$ 是子流形. 考虑集合 $T_S=\{f\in C^r(M, N)$: $\mathrm{graph}(f)$ 与 S 匀断相交$\}$. 其中 $\mathrm{graph}(f)=\{(p, f(p)); p\in M\}$. 证明 T_S 是 $C^r(M, N)$ 中的剩余集.

17．对每个 $f\in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$，考虑映射

$$j^rf: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\times\cdots\times L_s^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$
$$x\mapsto(x, f(x), df(x), \cdots, d^rf(x)).$$

设 E 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\times\cdots\times L_s^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. 对每一开集 $U\subset E$，定义子集:

$$\mathscr{M}(U)=\{f\in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m): j^rf(\mathbf{R}^n)\subset U\}.$$

(a) 证明集合 $\mathscr{M}(U)$ 对 $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 的一拓扑 (Whitney 拓扑) 形成一拓扑基.

(b) 证明具 Whitney 拓扑的 $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 是 Baire 空间;

(c) 证明所有 C^∞ 映射构成 $C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 中的稠密子集;

(d) 证明，如果 $k\leqslant r$，则映射

$$C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\to C^{r-k}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\times\cdots\times L_s^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m))$$
$$f\mapsto j^kf$$

连续;

(e) 设 $S\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 是一子流形. 考虑集合 $T_S=\{f\in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m): j^1f \pitchfork S\}$，其中 $r\geqslant 2$. 证明 T_s 是剩余集.

18．设 $X^0\in\mathscr{X}^r(S^1)$ 是一个无奇点的向量场. Σ_1 是向量场 $X=fX^0\in\mathscr{X}^r(S^1)$ 的集合，其中 X 的奇点除了 f 在其上的二阶导数不等于零的一个以外都是非退化的. 设 $\Sigma_{1,1}$ 是向量场 $X=fX^0$ 的集合，它们的奇点除了 f 在其上的二阶导数不等于零的两个以外都是非退化的. 设 $\Sigma_{1,2}$ 是向量场 $X=$

fX^0 的集合，其中 X 的奇点除了 f 在其上的二阶导数等于零，但三阶导数不等于零的一个以外都是非退化的.

(a) 证明 Σ_1 是 Banach 空间 $\mathscr{X}^r(S^1)$ 中余维为 1 的子流形，且 Σ_1 在 $\mathscr{X}^r(S^1)-G$ 中开稠，其中 G 为第四节中由结构稳定向量场组成的集合.

(b) 证明 $\Sigma_2=\Sigma_{1,1}\cup\Sigma_{1,2}$ 是 $\mathscr{X}^r(S^1)$ 的余维为 2 的子流形. 且 Σ_2 在 $\mathscr{X}^r(S^1)-(G\cup\Sigma_1)$ 中开稠.

(c) 分别描述 Σ_1 与 Σ_2 上任一向量场邻域中的所有等价类.

注　在 Sotomayor[114] 有关分歧理论的内容中曾考虑了与此类似的一些条件.

19. (a) 设 $f(x)=\lambda x$, $0<\lambda<1$, 证明如果 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是与 f 可交换的 C^1 微分同胚，则 g 是线性的.

(b) 证明，如果 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 微分同胚，它与特征值为复数的线性收缩可交换，则 g 是线性的.

(c) 证明存在与线性收缩可交换的非线性的 C^1 微分同胚.

20. Poincaré 紧化　考虑球面 $S^2=\left\{y\in\mathbb{R}^3;\ \sum_{i=1}^{3}y_i^2=1\right\}$ 和球面在此极的切平面 $P=\{y\in\mathbb{R}^3;\ y_3=1\}$, $U_i=\{y\in S^2\cdot y_i>0\}$ 与 $V_i=\{y\in S^2;\ y_i<0\}$. $\pi_3: P\to U_3$, $\bar{\pi}_3: P\to V_3$ 是两个中心投影，即 $\pi_3(x)$ 与 $\bar{\pi}_3(x)$ 是连接 x 和原点的直线与 U_3 和 V_3 的交点. 设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性向量场，考虑 U_3 上的向量场 $X^1=(\pi_3)_*L$ 和 V_3 上的向量场 $X^2=(\bar{\pi}_3)_*L$.

(a) 证明 X^1 与 X^2 可扩张为 S^2 上的一 C^∞ 向量场 X, 称为 $\pi(L)$, 且赤道关于 X 不变.

(b) 描述向量场 $\pi(L^i)$, $i=1, 2, 3, 4$, 的轨道，其中 L^i 在标准基底下分别由以下矩阵所表示

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

(c) 证明，如果 L^1 与 $L^2=AL^1A^{-1}$ 是线性向量场，A 是线性同构，则 $\pi(L^1)$ 与 $\pi(L^2)$ 拓扑等价.

(d) 证明，如果 L 是一线性向量场，它有两个相等的特征值，或者有一个特征值其实部为零，则 $\pi(L)$ 在 $\mathscr{X}^\infty(S^2)$ 中不是结构稳定的.

提示：应用由 $\varphi_i(y)=(y_j/y_i,\ y_k/y_i)$, $\psi_i(y)=(y_j/y_i,\ y_k/y_i)$, $j<k$, 所定义的局部卡 $\varphi_i: U_i\to\mathbb{R}^2$, $\varphi_i: V_i\to\mathbb{R}^2$.

注. G. Palis 在 [73] 中描述了在球面 S^n 上所有线性向量场组成的集合中的为结构稳定的向量场的特性.

21. $X\in\mathscr{X}^r(M^n)$, $r\geqslant 1$ 的轨道 γ 称为 ω 回复[1], 如果 $\gamma\subset\omega(\gamma)$. 设 M 为一紧流形, γ 是 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的一条 ω 回复轨道. 如果 $f=X_{t=1}$, 且 $x\in\gamma$, 证明 x 是 ω 回复的, 即 $x\in\omega_f(x)$.

注. $X\in\mathscr{X}^1(M)$ 的 Birkhoff 中心 $C(X)$ 定义为既是 ω 回复又是 α 回复的所有轨道的集合的闭包. 对 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 可作同样的定义. 此练习说明 $C(X)=C(f)$, 其中 f 是 X 的时间为 1 的微分同胚.

---

1) $\omega(\alpha)$ 回复即 $P^+(P^-)$ 稳定. ——译者注

第二章 局部稳定性

本章分析向量场的轨道的局部拓扑性态. 现将证明：对于属于空间 $\mathscr{X}^r(M)$ 的一个开稠子集中的向量场，我们能在流形的每一点的一个邻域内描述其轨道的性态. 并对于向量场的小扰动，轨道的局部结构不会发生变化，从而由拓扑共轭得到一个完全分类.

我们把这样一个局部问题分成两部分考虑. 第一部分考虑正则点邻域，比较简单，在第 1 节中处理. 第二部分考虑奇点邻域，在第 2 节至第 5 节中阐述. 第 2 节专门讨论线性向量场及线性同构，并对它们引入双曲概念. 在第 3 节将此概念推广到非线性向量场的奇点及微分同胚的不动点. 在第 4 节证明双曲奇点和双曲不动点的局部稳定性. 最后，在第 5 节我们介绍局部拓扑分类. 在第 6 节专门讨论另一重要结果，即稳定流形定理. 与此密切相关的 λ 引理（倾角引理）在第 7 节讨论，由此我们得出一些有关的应用以及局部稳定性的一个新证明.

§1. 管状流定理

定义. 设 X, $Y\in\mathscr{X}^r(M)$ 及 p, $q\in M$. 若存在邻域 V_p 与 W_q 和同胚 $h: V_p\to W_q$, 具有 $h(p)=q$, 它将 X 的轨道保向地变为 Y 的轨道，我们称 X 与 Y 分别在点 p 与 q 为**拓扑等价**.

例. 考虑在 S^2 上由图 1 给出的向量场 X 与 Y. X, Y 在 P_N, P'_N 是不等价的，因为 P'_N 的每一邻域包含 Y 的闭轨道，但 P_N 附近却没有 X 的闭轨道.

定义. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 及 $p\in M$. 我们称 X 在点 p 为**局部稳定**，若对任意给定的邻域 $U(p)\subset M$, 存在 X 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{N}_X$, 使得对每一 $Y\in\mathscr{N}_X$, 存在 U 中某点 q, X, Y 分别在 p, q

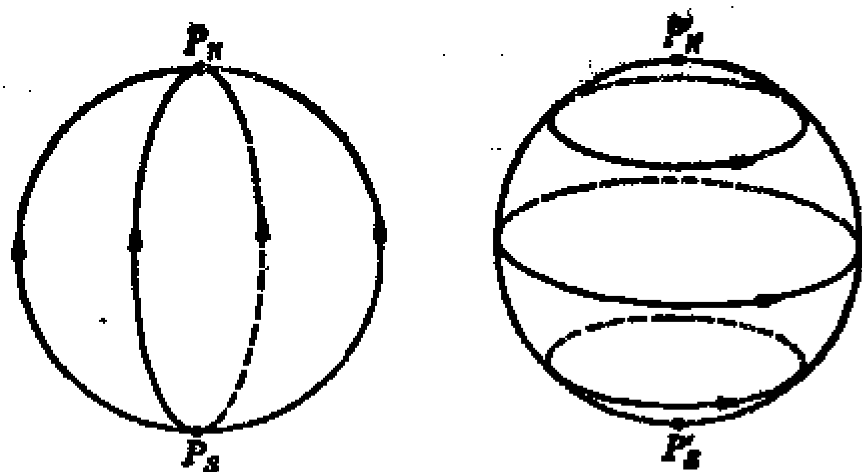


图 1

点拓扑等价.

下一定理描述正则点邻域中轨道的局部性态.

1.1 定理(管状流). 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$, $p\in M$ 是 X 的正则点. 记 $C=\{(x^1,\cdots,x^m);\ |x^i|<1\}$, X_C 是由 $X_C(x)=(1,0,\cdots,0)$ 定义在 C 上的向量场. 则对 M 上点 p 的某一邻域 V_p, 存在一 C^r 微分同胚 $h: V_p\to C$, 将 X 的轨道变为 X_C 的轨道.

证明. 设 $x: U\to U_0\subset R^m$ 是环绕 p 的局部卡, 具有 $x(p)=0$. 设 x_*X 是由 X 导出的在 U_0 上的 C^r 向量场, 由于 $X(p)\neq 0$, 有 $x_*X(0)\neq 0$. 设 $\varphi: [-\tau,\tau]\times V_0\to U_0$ 是 x_*X 的局部流, 令 $H=\{\omega\in\mathbb{R}^m;\ \langle\omega,\ x_*X(0)\rangle=0\}$, 是同构于 $\mathbb{R}^{m-1}$ 的子空间. 令 $\psi: [-\tau,\ \tau]\times S\to U_0$ 是 φ 在 $[-\tau,\ \tau]\times S$ 上的限制, 此处 $S=H\cap V_0$. 取 $\mathbb{R}\times H\approx\mathbb{R}^m$ 的一基底 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_m\}$, 此处 $e_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$, 且 $e_2,\ \cdots,\ e_m\subset\{0\}\times H$. 因而有

$$D\psi(0,\ 0)e_1=x_*X(0)\quad\text{(由局部流的定义)}$$

$$D\psi(0,\ 0)e_j=e_j,\qquad j=2,\ \cdots,\ m,$$

这是由于对所有 $y\in S$, 有 $\psi(0,\ y)=y$.

因此 $D\psi(0,\ 0): \mathbb{R}\times H\to\mathbb{R}^m$ 是一同构. 由反函数定理, ψ 是 $[-\tau,\ \tau]\times S$ 中 $(0,\ 0)$ 的一个邻域到 $\mathbb{R}^m$ 中 0 的一个邻域上的微分同胚. 故若 $\varepsilon>0$ 足够小, $C_\varepsilon=\{(t,\ x)\in\mathbb{R}\times H;\ |t|<\varepsilon$, 且 $\|X\|<\varepsilon\}$[1], 且 $\tilde{\psi}: C_\varepsilon\to U_0$ 是 ψ 在 C_ε 上的限制, 则 $\tilde{\psi}$ 是到其像集上的 C^r

1) 原书误为 $C_\varepsilon=\{(t,\ x)\in\mathbb{R}\times H;\ |t|<\varepsilon\}$ 且 $\|x\|<\varepsilon$. ——译者注

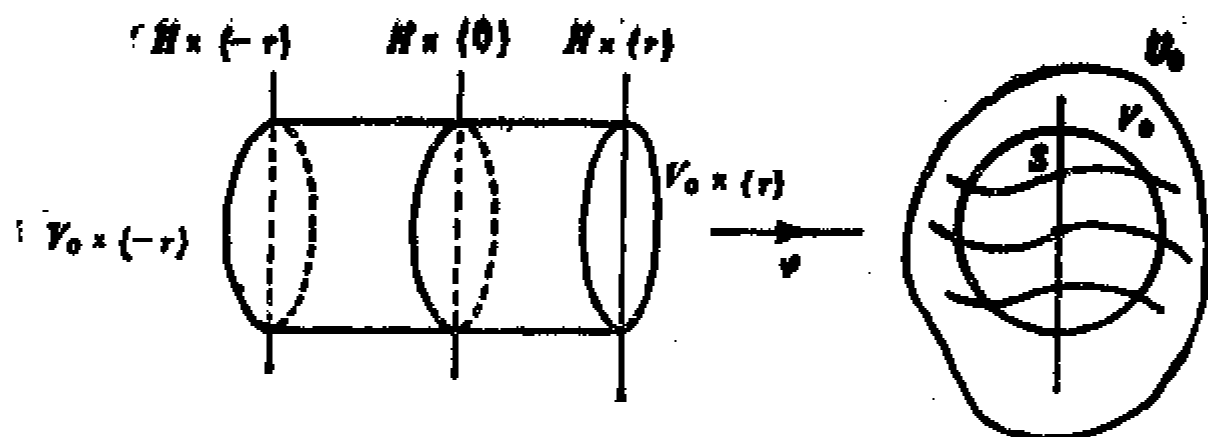


图 2

微分同胚，且此像集在 U_0 中开．并且 $\tilde{\psi}$ 使 C_s 上的平行向量场的轨道变为 $\alpha_* X$ 的轨道．考虑 C^∞ 微分同胚 $f: C\to C_s$, $f(y)=sy$，且定义 $h^{-1}=\alpha^{-1}\tilde{\psi}f$: $C\to M$．则 h: $\alpha^{-1}\tilde{\psi}(C_s)\to C$ 是一满足定理条件的 C^r 微分同胚． □

注．由 $\tilde{h}^{-1}=\alpha^{-1}\tilde{\psi}$ 定义的微分同胚 $\tilde{h}^{-1}$: $C_s\to M$ 将单位平行场 X_{C_s} 的轨道保持参数地变为场 X 的轨道．

推论 1. 若 $X, Y\in\mathscr{X}^r(M)$，且 $p, q\in M$ 分别是 X 和 Y 的正则点，则 X 在点 p 等价于 Y 在点 q． □

推论 2. 若 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，且 $p\in M$ 是 X 的正则点，则 X 在点 p 局部稳定． □

§2．线性向量场

设 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射组成的向量空间，具有通常的范数：

$$\|L\|=\sup\{\|Lv\|;\ \|v\|=1\}.$$

首先我们回顾线性代数的某些基本结果，若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，且 k 是正整数，我们记线性映射 $L\circ\cdots\circ L$ 为 L^k．用归纳法容易证明 $\|L^k\|\leqslant\|L\|^k$．考虑线性映射序列 $E_m=\sum_{k=0}^{m}1/k!\,L^k$，此处 L^0 指恒等映射．

2.1 引理． 序列 E_m 收敛．

证明. 实数序列 $S_m=\sum_{k=0}^{m}1/k!\,\|L\|^k$ 是一 Cauchy 序列，它收敛到 $e^{\|L\|}$. 另一方面

$$\|E_{m+m'}-E_m\|=\left\|\sum_{k=m+1}^{m+m'}\frac{1}{k!}L^k\right\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{m+m'}\frac{1}{k!}\|L\|^k$$
$$=\|S_{m+m'}-S_m\|.$$

因此 $\{E_m\}$ 是一 Cauchy 序列. 由于 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 是一完备度量空间，故序列 $\{E_m\}$ 收敛.

定义. 由 $\exp(L)=e^L=\sum_{k=0}^{\infty}1/k!\,L^k$ 定义的映射 $\exp$: $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 叫**指数映射**.

2.2 引理. 设 α: $\mathbb{R}\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 由 $\alpha(t)=e^{tL}$ 定义. 则 α 可微，且 $\alpha'(t)=Le^{tL}$.

证明. 令 $\alpha_m(t)=I+tL+(t^2/2!)L^2+\cdots+(t^m/m!)L^m$，显然 α_m 是可微的，且

$$\alpha_m'(t)=L+tL^2+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}L^m=L\alpha_{m-1}(t).$$

由于 $\alpha_{m-1}(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 的每一有界子集上一致收敛到 e^{tL}，因而 $\alpha_m'(t)$ 一致地 $\to Le^{tL}$. 故 α 可微且 $\alpha'(t)=Le^{tL}$. □

2.3 命题. 设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性向量场. 则由 $\varphi(t,x)=e^{tL}x$ 定义的映射 φ: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是场 L 的流.

证明. 由于映射 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $(L,x)\to Lx$ 是双线性的，且映射 $t\mapsto e^{tL}$ 是可微的，因而由锁链规则，φ 是可微的，并且由引理2.2，$\partial/\partial t\varphi(t,x)=L\varphi(t,x)$. 由于对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，$\varphi(0,x)=x$，命题得证. □

设 $\mathbb{C}^n$ 是 n 复数组的集合，具有通常的向量空间结构. $\mathbb{C}^n$ 的元素可以写成 $u+iv$ 的形式，其中 $u,v\in\mathbb{R}^n$. 若 $a+ib\in\mathbb{C}$，则

$$(a+ib)(u+iv)=(au-bv)+i(av+bu).$$

以 $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ 表示从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性映射组成的复向量空间，具有通常的范数: $\|L\|=\sup\{\|Lv\|;\ v\in\mathbb{C}^n,\text{ 且 }\|v\|=1\}$. 若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，我们可以由 $\tilde{L}(u+iv)=L(u)+iL(v)$ 定义一映射 $\tilde{L}$: $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$. 容

易看出 $\tilde{L}$ 是 $\mathbb{C}$ 线性的，也就是说 $\tilde{L}\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$．设 $\exp\colon\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)\to\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ 是指数映射，它和实的情形同样定义．设 $\mathscr{C}\colon\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ 将每一算子 L 对应到上面定义的它的复化 $\tilde{L}$．下面的命题直接由定义得出．

2.4 命题． 映射 $\mathscr{C}\colon\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 满足下列性质：

(1) $\mathscr{C}(L+T)=\mathscr{C}(L)+\mathscr{C}(T)$，$\mathscr{C}(\alpha L)=\alpha\mathscr{C}(L)$；

(2) $\mathscr{C}(LT)=\mathscr{C}(L)\mathscr{C}(T)$；

(3) $\mathscr{C}(\operatorname{Exp}L)=\operatorname{Exp}\mathscr{C}(L)$；

(4) $\|\mathscr{C}(L)\|=\|L\|$，

对任意 $L,T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$ 成立．

例． 设 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$，设 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一基底，关于这个基底，L 的矩阵为 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$．则关于 $\mathbb{C}^2$ 中的基底 $\{e_1+ie_2,\ e_1-ie_2\}$，$\tilde{L}=\mathscr{C}(L)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \bar{\lambda}\end{pmatrix}$，此处 $\lambda=\alpha+i\beta$ 且 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$．因而 $e^{\tilde{L}}$ 关于此基底的矩阵为 $\begin{pmatrix}e^{\lambda} & 0\\ 0 & e^{\bar{\lambda}}\end{pmatrix}$．另一方面，

$$\mathscr{C}(e^L)(e_1+ie_2)=e^Le_1+ie^Le_2=e^{\tilde{L}}(e_1+ie_2)=e^{\lambda}(e_1+ie_2).$$

由于 $e^{\lambda}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)$，因此 $e^Le_1=e^{\alpha}(\cos\beta e_1-\sin\beta e_2)$，$e^Le_2=e^{\alpha}(\sin\beta e_1+\cos\beta e_2)$．故关于基底 $\{e_1,e_2\}$，e^L 的矩阵为

$$e^{\alpha}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}.$$

2.5 定理（实标准型）．若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，则 $\mathbb{R}^n$ 有一基底，使 L 关于这个基底的矩阵有形式

$$\begin{pmatrix}A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_s\end{pmatrix},$$

此处

$$A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & & 0\\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,r,\ \lambda_i\in\mathbb{R}$$

$$B_j=\begin{pmatrix}C_j & & & 0\\ I & C_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & C_j\end{pmatrix},\quad j=1,\cdots,s$$

$$C_j=\begin{pmatrix}\alpha_j & \beta_j\\ -\beta_j & \alpha_j\end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \alpha_j,\ \beta_j\in\mathbb{R}.$$

除了次序以外，这些子矩阵 $A_1,\cdots,A_r,B_1,\cdots,B_s$ 是唯一确定的. □

推论. 设 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 给定 $\varepsilon>0$, 则 $\mathbb{R}^n$ 有一基底, 使 L 关于它的矩阵有形式

$$\begin{pmatrix}A_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & A_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_s\end{pmatrix},$$

其中

$$A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & 0\\ \varepsilon & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon & \lambda_i\end{pmatrix},$$

$$B_j=\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & & & & & & \\ -\beta_j & \alpha_j & & & & & 0 & \\ \varepsilon & 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & \varepsilon & & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & 0 & & \varepsilon & 0 & \alpha_j & \beta_j & \\ & & & 0 & \varepsilon & -\beta_j & \alpha_j & \end{pmatrix}.$$ □

2.6 引理. 若 $A, B\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $AB=BA$, 则 $e^{A+B}=e^Ae^B$.

证明. 设 $S_m(t)=I+tA+\cdots+(t^m/m!)A^m$. 由于 $AB=BA$, 我们有 $A^kB=BA^k$, 从而 $S_m(t)B=BS_m(t)$. 因 $S_m(t)\to e^{tA}$, 故 $e^{tA}B=Be^{tA}$. 设 $x\in\mathbb{R}^n$, 考虑曲线 α, β: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\alpha(t)=e^{t(A+B)}x$, $\beta(t)=e^{tA}e^{tB}x$. 由引理 2.2, $\alpha'(t)=(A+B)e^{t(A+B)}x$, 而

$$\beta'(t)=Ae^{tA}e^{tB}x+e^{tA}Be^{tB}x=Ae^{tA}e^{tB}x+Be^{tA}e^{tB}x=(A+B)\beta(t),$$

(这里用到 $e^{tA}B=Be^{tA}$.) 故 α 与 β 都是线性向量场 $A+B$ 的积分曲线, 且满足相同的初始条件 $\alpha(0)=\beta(0)=x$. 由唯一性定理, $\alpha(t)=\beta(t)$ 对所有 t 成立. 特别有 $e^{A+B}x=e^Ae^Bx$. 由于它对所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立, 因而 $e^{A+B}=e^Ae^B$. □

若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\tilde{L}$ 的谱, 即 $\tilde{L}$ 的特征值的集, 称为 L 的复谱, 它与 L 的特征多项式的根集重合. 复化算子 $\tilde{L}$ 的 Jordan 标准型表为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix},$$

此处

$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

其中 λ_i 是 $\tilde{L}$ 的特征值.

我们指出: 三角形复矩阵的对角元素是其特征值, 它出现的次

数是特征值的重数.

2.7 命题. 若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 且 λ 是 $\tilde{L}$ 的特征值，则 e^{λ} 是 e^{L} 的特征值，且具有相同的重数.

证明. 考虑 $m\times m$ 矩阵 A

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

此处 $\lambda\in\mathbb{C}$. 我们有 $A=D+N$，此处

$$D=\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

且

$$N=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易看出 $N^m=0$ 且 $ND=DN$. 由引理 2.6，有 $e^A=e^De^B$ 但当 $k\geq m$ 时 $N^k=0$，故 $e^N=I+N+N^2/2!+\cdots+N^{m-1}/(m-1)!$. 因此

$$e^N=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1/(m-1)! & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^B=\begin{pmatrix} e^{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

现在

$$e^A=e^De^N=e^{\lambda}e^N.$$

故 e^A 是一个三角形矩阵，它的所有对角元素都等于 e^{λ}，因而 e^{λ} 是

e^A 的 m 重特征值.

现设 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 由实标准型定理, $\tilde{L}$ 关于 $\mathbb{C}^n$ 的某一基底 β 的矩阵有形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix},$$

此处

$$A_j=\begin{pmatrix} \lambda_j & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

容易看出

$$A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r^k \end{pmatrix},$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$ 成立. 因此

$$e^A=\begin{pmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r} \end{pmatrix}.$$

这证明 e^A 的特征值正好是 $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_r}$, 此处 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 A 的特征值. 但关于 $\mathbb{C}^n$ 的基底 β, $\widetilde{e^L}=e^{\tilde{L}}$ 由矩阵 e^A 表示, 故得 e^L 的复化的特征值为 $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_r}$. □

定义. 线性向量场 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 称为双曲的, 若 L 的谱与虚轴不相交. L 的具有负实部的特征值的数目称为 L 的指标.

注意, 一个双曲线性向量场仅有一个奇点, 即原点.

2.8 命题. 若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 是一双曲向量场, 则 $\mathbb{R}^n$ 有唯一的直和分解(称为一个"分裂") $\mathbb{R}^n=E^s\oplus E^u$, 此处 E^s 与 E^u 对于 L 为不变子空间, 且对于由 L 定义的流, $L^s=L|E^s$ 的特征值有负的实部, 而 $L^u=L|E^u$ 有正的实部.

证明. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一基底, 关于它, L 的矩阵是实标准型. 对于这个基底的元素的一个适当的次序, L 的矩阵有形式

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & A_{s'} & & & & & & & & & \\ & & & B_1 & & & & & & & 0 & \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & B_{s''} & & & & & & \\ & & & & & & C_1 & & & & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & C_{u'} & & & \\ & & & & & & & & & D_1 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & D_{u''} \end{pmatrix},$$

此处
$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i<0,$$

$$B_j=\begin{pmatrix} M_j & & & 0 \\ I & M_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_j \end{pmatrix},$$

$$M_j=\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

且 $\alpha_j<0$.
$$C_k=\begin{pmatrix} \lambda_k & & & 0 \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \lambda_k>0$$

而
$$D_l=\begin{pmatrix} M_l & & & 0 \\ I & M_l & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & M_l \end{pmatrix},$$

$$M_l=\begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}, \quad 且\ \alpha_l>0.$$

设 E^s 是由 $e_1, \cdots, e_s$ 生成的子空间，此处 $e_1, \cdots, e_s$ 对应于关于 $A_1, \cdots, A_{s'}, B_1, \cdots, B_{s''}$ 的不变子空间．设 E^u 是由 $e_{s+1}, \cdots, e_n$ 生成的子空间．显然 E^s 与 E^u 对 L 是不变的，且关于基底 $\{e_1, \cdots, e_s\}$，L^s 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_{s'} & & \\ & & & B_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_{s''} \end{pmatrix},$$

而 L^u 关于基底 $\{e_{s+1}, \cdots, e_n\}$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{u'} & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_{u''} \end{pmatrix},$$

这证明了所需分解的存在性．

设 $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 是一双曲向量场．若 L_t 表示 L 的流，则 $L_1 = e^L$，且由于 L 没有特征值在虚轴上，因而由命题 2.7，L_1 没有特征值在单位圆 S^1 上．

定义．一线性同构 $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ 是双曲的，若 A 的谱与单位圆 $S^1 \subset \mathbb{C}$ 不相交．特别是由双曲线性向量场的流，在时间 1 导出的微分同胚是双曲线性同构．

2.9 命题．若 $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ 是一双曲同构，则有唯一的直和分解 $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$，使得 E^s 与 E^u 对 A 是不变的，且 $A^s = A|E^s$ 与 $A^u = A|E^u$ 的特征值分别是 A 的模小于 1 的与模大于 1 的特征值．

证明．与命题 2.8 的证明类似． □

2.10 命题．若 $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ 是一双曲同构，则存在 $\mathbb{R}^n$ 上一范数 $\|\cdot\|_1$，使得 $\|A^s\|_1 < 1$ 而 $\|(A^u)^{-1}\| < 1$，即 A^s 是一压缩而 A^u 是一扩张．

证明．考虑 $A^s = A|E^s$ 的标准型，

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''} \end{pmatrix},$$

此处
$$A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},\quad |\lambda_i|<1$$

且
$$B_j=\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & & & & 0 \\ -\beta_j & \alpha_j & \ddots & & & \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & \alpha_j & \beta_j \\ 0 & & 0 & 1 & -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix},\quad \alpha_j^2+\beta_j^2<1.$$

对每一$t\in R$，考虑矩阵

$$A_i(t)=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & t & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$B_j(t)=\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & & & & 0 \\ -\beta_j & \alpha_j & \ddots & & & \\ t & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & t & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & t & 0 & \alpha_j & \beta_j \\ 0 & & 0 & t & -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix},$$

及
$$M(t)=\begin{pmatrix} A_1(t) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & A_{r'}(t) & & \\ & & & B_1(t) & \\ 0 & & & & \ddots \ B_{s''}(t) \end{pmatrix}.$$

我们断言，存在 $\delta>0$ 具有下述性质：若 $\varepsilon<\delta$，且 $e_1,\cdots,e_s$ 是 E^s 的一标准正交基，又 A 是 E^s 的一线性变换，其矩阵关于此基底为 $M(\varepsilon)$，则 $\|A\|<1$。事实上，设 $A(t)$ 是 E^s 的线性变换，它关于基底 $e_1,\cdots,e_s$ 的矩阵是 $M(t)$。容易看出，$\|A(0)\|=\max\{|\lambda_i|,\sqrt{(\alpha_j^2+\beta_j^2)}\}$。故 $\|A(0)\|<1$。由于复合 $t\mapsto A(t)\mapsto\|A(t)\|$ 是连续的，故存在 $\delta>0$，使当 $0<t<\delta$ 时，$\|A(t)\|<1$。断言得证。

设 $\delta>0$ 如上，由定理 2.5 的推论，E^s 有一基底 $e_1,\cdots,e_s$，使 A^s 关于它的矩阵为 $M(\varepsilon)$。我们在 E^s 上定义一新的内积为 $\langle e_i,e_j\rangle_1=\delta_{ij}$，此处若 $i=j$，有 $\delta_{ij}=1$ 而若 $i\neq j$，则 $\delta_{ij}=0$。设 $\|\cdot\|_1$ 是对应于 $\langle,\rangle_1$ 的范数。因为此基底在新的度量中是标准正交的，由上述结论得出 $\|A^s\|_1<1$。类似地，可改变 E^u 的范数，使得 $\|(A^u)^{-1}\|<1$。我们在 $\mathbb{R}^n$ 上定义一范数 $\|\cdot\|_1$ 为
$$\|v\|_1=\max\{\|v^s\|_1,\ \|v^u\|_1\},$$
此处 v^s 与 v^u 分别为 v 在 E^s 与 E^u 中的分量。显然这个范数满足命题的条件。 □

推论. 若 L 是双曲线性向量场，其流为 L_t，且 $\mathbb{R}^n=E^s\oplus E^u$ 是命题 2.8 中的分裂。则当 $x\in E^s$ 且 $t\to+\infty$，或 $x\in E^u$，且 $t\to-\infty$ 时，$L_t(x)$ 收敛到原点。

证明. 设 $x\in E^s$。只需证明当 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\to\infty$ 时 $L_n(x)\to 0$。事实上，若 $t\in[0,1]$，由 L_t 的连续性可得：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_t>0$ 使得对 $\|y\|<\delta_t$，有 $\|L_t(y)\|<\varepsilon$。由于 $[0,1]$ 紧致，存在 $\delta>0$，使得对 $\|y\|<\delta$ 及所有 $t\in[0,1]$ 有 $\|L_t(y)\|<\varepsilon$。若当 $n\to\infty$ 时有 $L_n(x)\to 0$，则存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得当 $n\geq n_0$ 时，$\|L_n(x)\|<\delta$。若 $t>n_0$，则 $t=n+s$，此处 $n\geqslant n_0$，$s\in[0,1]$。因而 $\|L_t(x)\|=\|L_sL_n(x)\|<\varepsilon$。故只需证明 $L_n(x)=L_1^n(x)$ 趋于 0 就够了。由上一命题，E^s 上有

一度量，L_1 在其中为一压缩，即 $\|L_1\|<1$．故

$$\|L_1^n(x)\|\leqslant\|L_1^n\|\|x\|\leqslant\|L_1\|^n\|x\|.$$

由于 $\|L_1\|^n\to 0$ 得 $\|L_1^n(x)\|\to 0$，即所要证的．推论的第二部分可类似地证明． □

2.11 命题． $\mathbb{R}^n$ 的所有双曲同构的集合 $H(\mathbb{R}^n)$ 在 $GL(\mathbb{R}^n)$ 中开且稠．

证明． (a) 开性．设 $A\in H(\mathbb{R}^n)$．我们证明：存在 $\delta>0$，使得若 $\|A-B\|<\delta$，则 $B\in H(\mathbb{R}^n)$．设 $\lambda\in S^1$．由于 λ 不是 $\widetilde{A}$ 的特征值，$\det(\widetilde{A}-\lambda I)\neq 0$，此处 I 是 $\mathbb{C}^n$ 的恒等映射，因为 $\det$：$\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}$ 是连续映射，故存在 $\delta_\lambda>0$ 及 λ 在 $\mathbb{C}$ 中一邻域 V_λ 使得若 $\|B-A\|<\delta_\lambda$ 且 $\mu\in V_\lambda$，则 $\det(\widetilde{B}-\mu I)\neq 0$．设 $V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_m}$ 是 S^1 的覆盖 $\{V_\lambda;\lambda\in S^1\}$ 的一个有限子覆盖．令

$$\delta=\min\{\delta_{\lambda_1},\cdots,\delta_{\lambda_m}\}.$$

若 $\|B-A\|<\delta$ 且 $\mu\in S^1$，则 μ 属于某 V_{λ_i}．故 $\det(\widetilde{B}-\mu I)\neq 0$.

(b) 稠密性．设 $A\in GL(\mathbb{R}^n)$，且设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为其特征值．容易看出：若 $\mu\in\mathbb{R}$，则 $A+\mu I$ 的特征值为 $\lambda_1+\mu,\cdots,\lambda_n+\mu$．设 $\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_r}$ 是 A 的特征值中不属于 S^1 的．考虑下列各数：

$\delta_1=\min\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$，

$\delta_2=\min\{|1-|\lambda_{i_1}||,\cdots,|1-|\lambda_{i_r}||\}$，

$\delta_3=\min\{|\alpha|;\ \alpha+i\beta$ 是 A 的特征值，具有 $\alpha^2+\beta^2=1$ 且 $\alpha\neq 0\}$.

显然 $\delta_1>0$，$\delta_2>0$ 且 $\delta_3>0$．若 $0<\mu<\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，且 λ 是 A 的特征值，则 $\lambda+\mu\notin S'$，故 $B=A+\mu I$ 是双曲的．给定 $\varepsilon>0$，取 $\mu<\varepsilon$ 且 $\mu<\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$．则 B 是双曲的，且 $\|B-A\|=\|\mu I\|<\varepsilon$．这证明 $H^n(\mathbb{R}^n)$ 在 $GL(\mathbb{R}^n)$ 中稠密． □

2.12 命题． $\mathbb{R}^n$ 上所有双曲线性向量场的集合 $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 中开且稠．

证明． (a) 开性．映射 $\exp$：$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)\to GL(\mathbb{R}^n)$ 连续．由命题 2.7，有 $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)=\exp^{-1}(H(\mathbb{R}^n))$．因为 $H(\mathbb{R}^n)$ 开，从而 $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ 也开．

(b) **稠密性**. 设 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 令 $\delta_1=\min\{|\alpha|;\ \alpha+i\beta$ 是 L 的特征值且 $\alpha\neq 0\}$. 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta<\min\{\varepsilon,\ \delta_1\}$. 易证向量场 $T=L+\delta I$ 是双曲的且 $\|T-L\|<\varepsilon$. □

我们的下一个目的是，对两个双曲线性向量场给出一个拓扑等价的必要充分条件

2.13 命题. 设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个双曲线性向量场, 其指标为 n. 则 $\mathbb{R}^n$ 上有一范数 $\|\cdot\|$, 使得若 $S^{n-1}=\{v\in\mathbb{R}^n;\ \|v\|=1\}$, 则对所有 $x\in S^{n-1}$, 在点 x 的向量 $L(x)$ 与 S^{n-1} 匀断相交.

证明. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 的一基底 $e_1,\ \cdots,\ e_n$, 使 L 关于它的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1(1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'}(1) & & & \\ & & & B_1(1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}(1) \end{pmatrix},$$

其中 $A_i(1)$ 和 $B_j(1)$ 与命题 2.8 中的一样.

设 $\overline{L}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一线性向量场, 在一正交基底中其矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_1(0) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'}(0) & & & \\ & & & B_1(0) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}(0) \end{pmatrix},$$

易证 $\overline{L}$ 与 S^{n-1} 匀断相交. 由于 S^{n-1} 紧致, 故若 $\varepsilon>0$ 充分小, 在此正交基底中的矩阵为

$$\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix} A_1(\varepsilon) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{s'}(\varepsilon) & & & \\ & & & B_1(\varepsilon) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & B_{s''}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

的场 $\overline{\overline{L}}$ 与 S^{n-1} 匀断相交. 另一方面, 由定理 2.5的推论, $\mathbb{R}^n$ 中有一基底, 使 L 在其中的矩阵为 $\overline{\overline{A}}$. 我们在 $\mathbb{R}^n$ 中定义一内积使得这个基底成为正交的, 因而由上面的讨论, L 与在此范数中的单位

球面匀断相交.

2.14 命题. 若 L 和 T 都是 $\mathbb{R}^n$ 上具有指标 n 的线性向量场，则存在一同胚 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $hL_t = T_t h$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立.

证明. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个范数，使得球面 $S_1^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n; \|v\|_1 = 1\}$ 和 $S_2^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n; \|v\|_2 = 1\}$ 分别与向量场 L 和 T 匀断相交. 若 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$，则由命题 2.10 的推论，有

$$\lim_{t\to\infty} L_t(x) = 0 \quad \text{及} \quad \lim_{t\to-\infty} \|L_{-t}(x)\| = \infty,$$

故 $\mathcal{O}_L(x)$ 必与 S_1^{n-1} 相交. 由于 L 与 S_1^{n-1} 匀断相交，因而 $\mathcal{O}_L(x)$ 与 S_1^{n-1} 交于唯一的点.

设 $h: S_1^{n-1} \to S_2^{n-1}$ 是任一同胚映射(例如，可令 $h(x) = x/\|x\|_2$). 我们将 h 扩张到 $\mathbb{R}^n$. 定义 $h(0) = 0$. 若 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$，则有唯一的 $t_0 \in \mathbb{R}$，使得 $L_{-t_0}(x) \in S_1^{n-1}$. 令 $h(x) = T_{t_0} h(L_{-t_0}(x))$. 显然 $hL_t = T_t h$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立且 h 有逆. 下面还需证明 h 连续.

设 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ 且 (x_m) 是一收敛到 x 的序列. 取 $t_m \in \mathbb{R}$，使得 $L_{-t_m}(x_m) \in S_1^{n-1}$，取 $t_0 \in \mathbb{R}$，使得 $L_{-t_0}(x) \in S_1^{n-1}$. 由于流连续，因而 $t_m \to t_0$ 且 $L_{-t_m}(x_m) \to L_{-t_0}(x)$. 故 $h(x_m) = T_{t_m} h L_{-t_m}(x_m)$ 收敛到 $T_{t_0} h L_{-t_0}(x) = h(x)$，从而证明 h 在 x 连续. 现证 h 在原点连续. 由命题 2.10[1] 及 S_2^{n-1} 的紧致性可知，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $t_\varepsilon > 0$，使得对所有 $t > t_\varepsilon$ 及所有 $y \in S_2^{n-1}$，$\|T_t(y)\| < \varepsilon$. 另一方面，由于 $L(0) = 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $\|x\| < \delta$ 且 $L_{-t}(x) \in S_1^{n-1}$，则 $t > t_\varepsilon$. 因此若 $\|x\| < \delta$ 有 $\|h(x)\| < \varepsilon$. 这证明了 h 的连续性. 类似地可证明 h^{-1} 连续.

2.15 命题. 设 L 与 T 是双曲线性向量场. 则 L 与 T 拓扑共轭当且仅当他们有相同的指标.

证明. 设 L 与 T 有相同的指标，设 E^s，$E^{s'}$ 分别为 L 与 T 的稳定子空间，则 $\dim E^s = \dim E^{s'}$. 由命题 2.14，存在同胚 $h_s: E^s \to E^{s'}$ 使 L^s 与 T^s 共轭，即 $h_s L_t^s = T_t^s h_s$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立. 类似地，存在同胚 $h_u: E^u \to E^{u'}$ 使 L^u 与 T^u 共轭. 我们用 $h(x^s + x^u) =$

1) 改为"由命题 2.10 的推论"似乎更妥. ——译者注

$h_s(x^s)+h_u(x^u)$定义$h: E^s\oplus E^u\to E^{s'}\oplus E^{u'}$. 易证$h$是同胚且使$L_t$与$T_t$共轭. 反之, 设$h$是$L$与$T$之间的拓扑等价. 由于0是$L$与$T$的唯一奇点, 必有$h(0)=0$. 若$x\in E^s$, 则$\omega(x)=0$. 由于拓扑等价保持轨道的$\omega$极限集, 故有$\omega(h(x))=h(\omega(x))=0$, 所以$h(x)\in E^{s'}$. 因此$h(E^s)\subset E^{s'}$. 类似地有$h^{-1}(E^{s'})\subset E^s$. 故$h|E^s$是$E^s$与$E^{s'}$之间的一同胚. 由拓扑学中的维数不变定理[1]有$\dim E^s=\dim E^{s'}$. 命题得证. □

下面我们要证明算子的特征值连续地依赖于算子. 意指: 对于$L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$是它的特征值, 其重数分别为$m_1, \cdots, m_k$. 考虑半径为$\varepsilon$中心为$\lambda_i$的球$B_\varepsilon(\lambda_i)$, $1\leqslant i\leqslant k$, 使得它们都互不相交. 我们要证明: 任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得若$T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$且$\|T-L\|<\delta$, 则对所有$1\leqslant i\leqslant k$, 在计算重数的情况下, T在$B_\varepsilon(\lambda_i)$内正好有m_i个特征值.

对于$L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, 令$\mathrm{Sp}(L)$表示$L$的谱, 即它的特征值的集合. 下一引理证明, 对于L的小扰动, $\mathrm{Sp}(L)$不可能有很大的改变.

2.16 引理. 设$L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得若$T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$且$\|T-L\|<\delta$, 则对每一$\lambda'\in\mathrm{Sp}(T)$, 存在$\lambda\in\mathrm{Sp}(L)$具有$|\lambda-\lambda'|<\varepsilon$.

证明. 若$\lambda\in\mathrm{Sp}(L)$, 则λ是复化算子$\tilde{L}$的一个特征值, 因而$|\lambda|\leqslant\|\tilde{L}\|=\|L\|$. 故若$\|T-L\|<1$, 则$T$的谱包含在$\mathbb{C}$上以原点为中心、$1+\|L\|$为半径的圆盘$D$的内部. 设$V_\varepsilon$为以$\mathrm{Sp}(L)$中的元素为中心, ε为半径的球的并集. 若$\mu\in D-V_\varepsilon$, 则

$$\det(\tilde{L}-\mu I)\neq 0.$$

由行列式的连续性, 在$\mathbb{C}$上存在μ的一个邻域U_μ以及$\delta_\mu>0$, 使得若$\|T-L\|<\delta_\mu$且$\mu'\in U_\mu$, 则$\det(\tilde{T}-\mu' I)\neq 0$, 因而$\mu'\notin\mathrm{Sp}(\tilde{T})$. 由$D-V_\varepsilon$的紧致性推出, 存在$\delta>0$, 使得若$\|T-L\|<\delta$且$\mu\in D-V_\varepsilon$, 则$\det(T-\mu I)\neq 0$. 由于$\mathrm{Sp}(T)\subset D$, 因而$\mathrm{Sp}(T)\subset V_\varepsilon$, 引理得证.

---

1) 原书误为"域不变性定理". ——译者注

若 L 的特征值都不相同，则由引理 2.16，它们随算子连续变化．设 λ 是 L 的 m 重特征值，且设 $E(L, \lambda)\subset \mathbb{C}^n$ 是 $(\tilde{L}-\lambda I)^m$ 的核，则 $E(L, \lambda)$ 是 m 维子空间，并且若 $k\geqslant m$，$(\tilde{L}-\lambda I)^k$ 的核是 $E(L, \lambda)$．

2.17 引理． 若 λ 是 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 的 m 重特征值，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\delta>0$，使得若 $\|T-L\|<\delta$，则包含在以 λ 为中心，ε_0 为半径的球内的 T 的特征值的重数之和最多为 m．

证明． 假若对所有 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在 $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\|T-L\|<\delta,$$

使得在计算重数的情况下，T 的特征值包含在以 λ 为中心、ε 为半径的球内的数目大于 m，我们将推出矛盾．此时存在一 $m'>m$ 及一算子序列 $L_k\to L$，使得 L_k 的特征值 $\lambda_{k_1}, \cdots, \lambda_{k_{m'}}$ 均收敛到 λ．设 E_k 是 $(\tilde{L}_k-\lambda_{k_1}I)\circ\cdots\circ(\tilde{L}_k-\lambda_{k_{m'}}I)$ 的核，我们可以假定 E_k 的维数是 m'．设 $e_1^k, \cdots, e_{m'}^k$ 是 E_k 的标准正交基，由于 $\|e_j^k\|=1$ 且 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球面是紧致的，我们可以假定(如有必要可取一子序列) $e_j^k\to e_j$．显然向量组 $e_1, \cdots, e_{m'}$ 是标准正交的，因而张成一 m' 维子空间 $\tilde{E}$．由于算子 $(\tilde{L}_k-\lambda_{k_1}I)\circ\cdots\circ(\tilde{L}_k-\lambda_{k_{m'}}I)$ 收敛到 $(\tilde{L}-\lambda I)^{m'}$，由连续性，$(L-\lambda I)^{m'}$ 的核包含 $\tilde{E}$，这是荒谬的，因为前者的维数 $m<m'$． □

2.18 命题． 算子 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 的特征值连续依赖于 L．

证明． 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是 L 的不同的特征值，具有重数 $n_1, \cdots, n_k$．由引理 2.16，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若 $\|T-L\|<\delta$，则 T 的特征值包含在以 λ_j 为中心、ε 为半径的那些球中，还需证明包含在以 λ_j 为中心的球中的 T 的特征值的重数之和恰好是 n_j．由引理 2.17，如果有必要，可取 $\varepsilon<\varepsilon_0$，这个和是小于或等于 n_j．若对某一 j 这个和严格地小于 n_j，则 T 的所有特征值的重数之和将严格地小于 $\sum_{j=1}^{k} n_j=n$，这是不合理的． □

推论． 若 $L\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 是一双曲向量场，则存在 L 的一邻域 $V\subset\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$，使得所有 $T\in V$ 与 L 有相同的指标． □

这个命题的另一推论是：多项式的根随其系数连续变化．

2.19 命题． 双曲线性向量场在线性向量场空间是结构稳定的．

证明． 这由上述推论以及命题2.15立即得出． □

2.20 命题． 设 L 是一结构稳定的线性向量场，则 L 是双曲的．

证明． 设 L 是一非双曲的线性向量场，$\delta=\min\{|\alpha|;\ \alpha+i\beta$ 是 L 的特征值且 $\alpha\neq 0\}$．若 $0<t<\delta$，则 $L+tI$ 与 $L-tI$ 是具有不同指标的双曲线性向量场，因而不能拓扑等价．这证明在 L 的任一邻域中，存在两个拓扑不等价的向量场．因而 L 不是结构稳定的． □

概括上面的结果，我们可以说线性向量场在线性场空间是结构稳定的当且仅当它是双曲的．并且所有结构稳定线性向量场组成 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ 的一个开稠子集

§3．奇点与双曲不动点

在这一节中我们将定义一子集 $\mathscr{G}\subset\mathscr{X}^r(M)$，使得每一 $X\in\mathscr{G}$ 有一局部轨道结构，它是稳定的且足够简单的，使我们能将其分类．

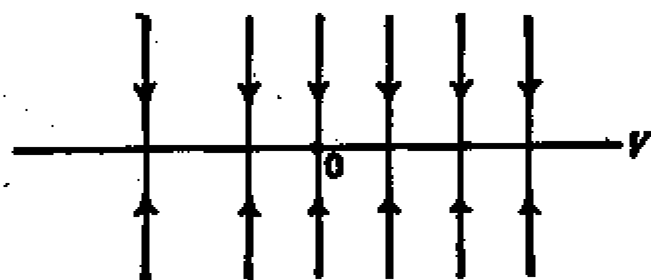


图 3

下面例子说明：一个向量场在一奇点邻近可能有非常复杂的轨道结构．

例． 若 L 是 $\mathbb{R}^2$ 上一个具有一个0特征值的线性向量场，则存在由 L 的奇点组成的一维子空间 $V\subset\mathbb{R}^2$．设 L 是在标准基底中矩阵为$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$的向量场，此时 $V=\{(t,\ 0);\ t\in\mathbb{R}\}$．

我们证明：有任意靠近 L 的不可数的向量场的集合 $\mathscr{M}$，使得当 $X,\ Z\in\mathscr{M}$ 时，在原点 X 不与 Z 局部等价．

设 Y 是常向量场 $Y=(1,\ 0)$．设 $K\subset\mathbb{R}$ 是一紧子集，我们知道，存在一个有界的 C^∞ 映射 $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它恰好在 K 上为0．我们

尘可假定 ρ 的从 1 至 r 阶导数都有界. 任给 $\varepsilon>0$, 我们取 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\|(1/n)\rho\|_r<\varepsilon$. 令 $Z=L+(1/n)\rho Y$, 则有 $\|Z-L\|_r<\varepsilon$, 且 Z 的奇点集合是 K. 因此若 K 与 K' 是两个不同胚的紧致集, 则如上构造的两个向量场拓扑不等价. 故向量场的等价类至少和 $\mathbb{R}$ 的紧致子集的同胚类一样多.

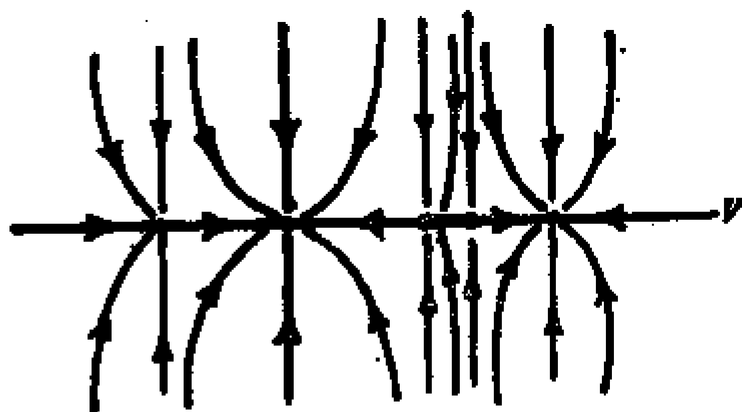


图 4

从这个例子诱导出下面的定义.

定义. 我们称 $p\in M$ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的一个**简单**奇点, 若 $DX_p: TM_p\to TM_p$ 没有零特征值.

3.1 命题. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$, 且假定 $p\in M$ 是 X 的简单奇点, 则分别存在 X 的邻域 $\mathscr{N}(X)\subset\mathscr{X}^r(M)$ 及 p 的邻域 $U_p\subset M$, 以及连续映射 $\rho: \mathscr{N}(X)\to U_p$, 它将每一向量场 $Y\in\mathscr{N}(X)$ 对应到 Y 在 U_p 中唯一的奇点. 特别地, 简单奇点是孤立的.

证明. 我们利用 Banach 空间的隐函数存在定理. 由于是局部问题, 因此利用局部卡, 我们可假定 $M=\mathbb{R}^m$, $p=0$ 且 X 是属于 $\mathscr{X}^r(D^m)$ 的向量场, 此处 $D^m=\{x\in\mathbb{R}^m; \|x\|\leqslant 1\}$. 故 $\mathscr{X}^r=\mathscr{X}^r(D^m)$ 是一 Banach 空间, 且由 $\varphi(x,Y)=Y(x)$ 给定的映射 $\varphi: D^m\times\mathscr{X}^r\to\mathbb{R}^m$ 是属于 C^r 类的. 我们有 $\varphi(0, X)=0$. 而且由假设,

$$D_1\varphi(0, X)=DX(0): \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

是同构, 由隐函数定理, 存在 0 的邻域 U 及 X 的邻域 $\mathscr{N}$ 和唯一的 C^r 函数 $\rho: \mathscr{N}\to U$, 使得 $\varphi(\rho(Y), Y)=0$. 因而对于 $x\in U$, $Y(x)=0$ 当且仅当 $x=\rho(Y)$. 同时, 由于 $DX(0)$ 是一同构, 且由同构组成的集是开集, 在必要时缩小 $\mathscr{N}$ 和 U, 我们可假定

$DY(\rho(Y))$是同构，因而$\rho(Y)$是Y的简单奇点. □

下面我们将用匀断相交来描述M上向量场X的简单奇点. 为此，考虑切丛$TM=\{(p, v); p\in M, v\in TM_p\}$且设$M_0=\{(p, 0); p\in M\}$是零截面. M_0是TM的子流形，微分同胚于M. 同时向量场$X\in\mathscr{X}^r(M)$可看作从M到TM的C^r映射，我们仍用同一字母X表示. 因此p是X的奇点当而且只当$X(p)\in M_0$.

3.2 命题. 设X是流形M上的C^r向量场($r\geqslant 1$)，设$p_0\in M$是X的一个奇点，则p_0是X的简单奇点当且仅当从M到TM的映射$p\mapsto(p, X(p))$在p_0点与零截面M_0匀断相交.

证明. 设x: $U\to\mathbb{R}^m$是一个局部卡，有$x(p_0)=0$. 令$TU=\{(p, v)\in TM; p\in U\}$. 由$Tx(p, v)=(x(p), Dx_p(v))$定义的映射$T_x$: $TU\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$是$TM$的一个局部卡. 考虑下面的图表

$$\begin{array}{ccc} & TU & \\ {}^{X}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle Tx} & \\ U & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m & \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^m, \end{array}$$

此处π_2是射影，$\pi_2(x, y)=y$.

令$h=\pi_2T_xX$. 则X在p_0与M_0匀断相交当且仅当p_0是h的正则点，亦即$dh(p_0)$: $TM_p\to\mathbb{R}^m$是同构. 另一方面，$dh(p_0)=Dx(p_0)DX(p_0)$. 因而$Dh(p_0)$是同构当而且只当$DX(p_0)$是同构，命题得证. □

设$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{X}^r(M)$是所有奇点都是简单的向量场的集合；亦即$\mathscr{G}_0=\{X\in\mathscr{X}^r(M); X: M\to TM$与$M_0$匀断相交$\}$. 由于简单奇点是孤立的且$M$是紧致的，因而任一$X\in\mathscr{G}_0$仅有有限个奇点.

3.3 命题. $\mathscr{G}_0$在$\mathscr{X}^r(M)$中开且稠.

证明. (a) 开性. 由于所有与M_0匀断相交的，从M到TM的C^r映射的集合是开集，故$\mathscr{G}_0$是开集.

(b) 稠密性. 设$X\in\mathscr{X}^r(M)$. 由Thom的匀断相交定理，存在任意逼近X的映射Y: $M\to TM$，与M_0匀断相交. 然而Y可能不是向量场，因为我们有可能对某点$p\in M$得出$\pi(Y(p))\neq p$，此处π: $TM\to M$表示映射$(p, v)\mapsto p$. 但$\pi X=id_M$，且若Y

充分逼近 X，则 $\varphi=\pi Y$ 逼近 id_M 从而是一微分同胚，因为 M 的所有微分同胚的集合在 $C^r(M, M)$ 中是开的. 令 $Z=Y\varphi^{-1}$，因 $\pi Z=\pi Y\varphi^{-1}=\varphi\varphi^{-1}=id_M$，故 Z 是 M 上的向量场. 由于 Y 与 M_0 匀断相交且 φ^{-1} 是微分同胚，故 Z 与 M_0 匀断相交. 若 Y 逼近于 X，则 Z 也逼近于 X. □

例. 在此例中我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 上一线性向量场，具有一个简单奇点，而且证明通过一个非线性的扰动可得出一个具有非常复杂的轨道结构的向量场. 考虑由

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

给出的向量场. 设 ρ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一 C^∞ 函数满足 $\rho(0)=0$ 且 $\rho^{(k)}(0)=0$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 成立. 设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场，由

$$X(x, y)=(y+\rho(r^2)x, -x+\rho(r^2)y)$$

定义，此处 $r^2=x^2+y^2$. 显然 X 是 C^∞ 且

$$DX(0, 0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因而 $(0, 0)$ 是 X 的简单奇点. 设 K 是 $\mathbb{R}^+$ 的包含 0 的紧致子集，我们可取 ρ 使 $\rho(K)=0$ 且 ρ 在 $I-K$ 上无处为 0，此处 $I=(-\delta, \delta)$ 是包含 K 的线段. 给定 $\varepsilon>0$ 及 $r>0$，我们可取 ρ 使得 $\|X-L\|_r<\varepsilon$. 若 $r_0\in\mathbb{R}^+$ 使 $\rho(r_0^2)=0$，则向量场 X 与半径为 r_0 的圆[1]相切，因而这个圆是 X 的一闭轨道. 另一方面若 $(a, b)\subset\mathbb{R}^+$ 是一线段满足对 $t\in(a, b)$，$\rho(t^2)>0$ 而 $\rho(a^2)=\rho(b^2)=0$，则经过圆环 $D_b-\overline{D}_a=\{z\in\mathbb{R}^2;\ a<\|z\|<b\}$ 中的点的 X 的轨道不是闭轨，事实上，它们是螺线，其 ω 极限集是半径为 b 的圆. 这是由于 $\langle(x, y), X(x, y)\rangle=r^2\rho(r^2)$，因而 X 的径向分量为 $r\rho(r^2)$，它对 $r\in(a, b)$ 是正的. 类似的，若对 $t\in(a, b)$ 有 $\rho(t^2)<0$ 而 $\rho(a^2)=\rho(b^2)=0$，则在圆环 $D_b-\overline{D}_a$ 中的轨道都以半径为 b 的圆为 α 极限集，而以半径为 a 的圆为 ω 极限集. 见图 5.

这个构造给出一个任意逼近 L 的向量场 X，其闭轨与 x 轴的

1) 这一段中的圆的中心都是原点. ——译者注

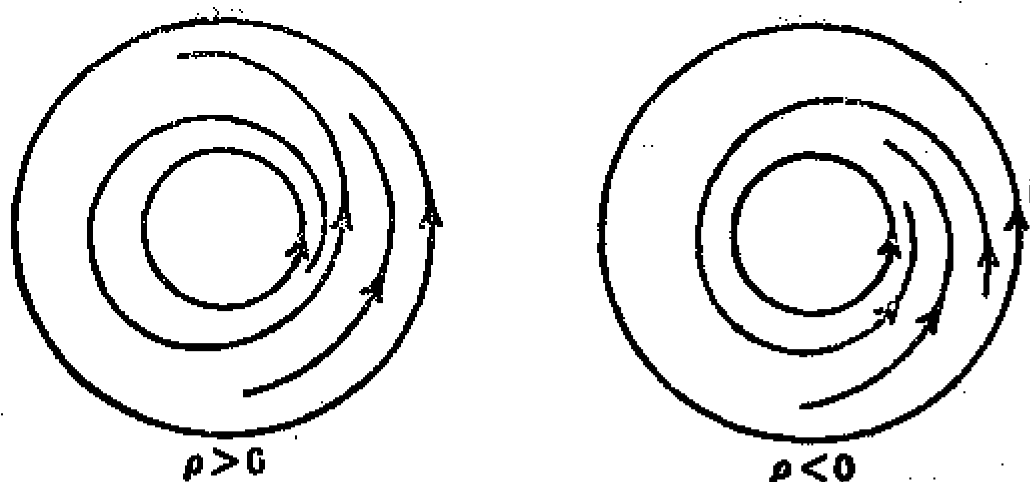


图 5

交点正好是紧致集 $\{r\in\mathbb{R}^+;\ r^2\in K\}$，它同胚于 K. 若 K 和 K' 是两个不同胚的紧致集，而 X 和 X' 是按上述构造相应于它们的向量场，则 X 和 X' 拓扑不等价.

定义. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 且 $p\in M$ 是 X 的奇点，我们说 p 是**双曲奇点**，若 $DX_p: TM_p\to TM_p$ 是双曲线性向量场，亦即 DX_p 没有特征值在虚轴上.

设 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{X}^r(M)$ 是其奇点都是双曲的那些向量场的集合，显然 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_0$.

3.4 定理. $\mathscr{G}_1$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中开且稠.

证明. 由于 $\mathscr{G}_0$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中开且稠，又 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_0$，故只需证明 $\mathscr{G}_1$ 在 $\mathscr{G}_0$ 中开且稠. 设 $X\in\mathscr{G}_0$ 且 $p_0, \cdots, p_k\in M$ 是 X 的奇点. 由命题 3.1，存在 X 的邻域 $\mathscr{N}(X)$ 及 $p_1, \cdots, p_k$ 的邻域 $U_1, \cdots, U_k$ 以及连续函数 $\rho_j: \mathscr{N}\to U_j$, $j=1,\cdots,k$，使得 $\rho_j(Y)$ 是 Y 在 U_j 中唯一的奇点. 我们可假定这些邻域彼此不相交. 若

$$p\in M-\bigcup_{j=1}^{k}U_j,$$

则 $X(p)\neq0$，故由 $M-\bigcup\limits_{j=1}^{k}U_j$ 的紧致性，存在 $\delta>0$，使得 $\|X(p)\|>\delta$ 对所有 $p\in M-\bigcup U_j$ 成立. 因此，如有必要可缩小 $\mathscr{N}$，我们可假定任意 $Y\in\mathscr{N}$ 在 $M-\bigcup\limits_{j=1}^{k}U_j$ 中无奇点. 现设 $X\in\mathscr{G}_1$，由于 DX_{p_j} 是双曲线性向量场，而所有这种向量场组成一开

集，由映射 ρ_j 的连续性以及如有必要缩小 $\mathcal{N}$，我们推出对所有 $Y\in\mathcal{N}$，$DY_{\rho_j(Y)}$ 是双曲线性向量场．故 $\mathcal{N}\subset\mathcal{G}_1$，从而 $\mathcal{G}_1$ 的开性得证．

假定 $X\in\mathcal{G}_0$，我们要证明存在 $Y\in\mathcal{G}_1\cap\mathcal{N}$ 任意逼近 X．注意若 $u>0$ 足够小，则对所有 $j=1,\cdots,k$，$DX_{p_j}+uI$ 是 TM_{p_j} 上的双曲线性向量场．因此只需证明：给定 X 的一邻域 $\mathcal{N}_1\subset\mathcal{N}$，存在 $Y\in\mathcal{N}_1$ 使得 $Y(p_j)=0$ 且 $DY_{p_j}=DX_{p_j}+uI$．设 $V_j\subset U_j$ 是 p_j 的邻域且 x^j: $V_j\to B(3)\subset\mathbb{R}^m$ 是一局部卡，具有 $x^j(p_j)=0$，此处 $B(3)$ 是半径为 3．中心是原点的球．设 φ: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是一正 C^∞ 函数，满足 $\varphi(B(1))=1$ 及 $\varphi(\mathbb{R}^m-B(2))=0$．以 x_*^jX 表示在局部卡 x^j 中向量场 X 的表达式，亦即

$$x_*^jX(q)=Dx^j((x^j)^{-1}(q))X((x^j)^{-1}(q)).$$

则我们定义 $Y(p)=X(p)$，若 $p\in M-\cup_jV_j$，而

$$Y(p)=D(x^j)^{-1}(x^j(p))(x_*^jX(x^j(p))+u\varphi(x^j(p))x^j(p)),$$

若 $p\in V_j$．易证 Y 是 C^∞ 向量场，$Y(p_j)=0$ 以及 $DY_{p_j}=DX_{p_j}+uI$．此外，可取 u 足够小，我们有 $Y\in\mathcal{N}_1$，证毕． □

下面我们把这些结果推广到紧致流形 M 的微分同胚．我们将略去这些命题和定理的证明，因为它们与对向量场刚给出的证明类似．

定义． 设 $p\in M$ 是微分同胚 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 的一不动点．我们说 p 是一*初等不动点*，若 1 不是 Df_p: $TM_p\to TM_p$ 的特征值．

3.5 命题． 设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 且假定 p 是 f 的初等不动点．则存在 f 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的邻域 $\mathcal{N}$ 及 p 的邻域 U，以及连续函数 ρ: $\mathcal{N}\to U$，它使每一 $g\in\mathcal{N}$ 对应 g 在 U 中的唯一不动点，且此不动点是初等的．特别是初等不动点是孤立的． □

设 Δ 表示对角线 $\{(p,p)\in M\times M;\ p\in M\}$，它是 $M\times M$ 的 m 维子流形．若 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$，考虑由 $\tilde{f}(p)=(p,f(p))$ 给出的映射 $\tilde{f}$: $M\to M\times M$，它的像集是 f 的图．

3.6 命题． 设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$，且 $p\in M$ 是 f 的不动点．则 p 是初等不动点当且仅当 $\tilde{f}$ 在 p 与 Δ 匀断相交． □

设 $G_0 \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ 是其不动点都是初等不动点的所有微分同胚的集合. 因而 $f \in G_0$ 当且仅当 $\tilde{f}$ 与 Δ 匀断相交. 利用 Thom 的匀断相交定理,我们得到下面的命题.

3.7 命题. G_0 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中开且稠. □

定义. 设 $p \in M$ 是 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的不动点. 我们称 p 为**双曲不动点**, 若 $Df_p: TM_p \to TM_p$ 是双曲同构, 亦即 Df_p 没有模为 1 的特征值.

设 $G_1 \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ 是其不动点都是双曲的所有微分同胚的集合.

3.8 定理. G_1 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中开且稠. □

在下一节中我们将证明任一微分同胚 $f \in G_1$ 是局部稳定的.

§4. 局部稳定性

本节我们将证明归功于 Hartman 与 Grobman 的一定理, 内容为: 一微分同胚 f 在一双曲不动点局部共轭于它的线性部分. 类似地, 一向量场 X 在一双曲奇点处局部共轭于它的线性部分. 因此我们得出在双曲不动点和在双曲奇点的局部稳定性. 我们给出的证明对 Banach 空间也是正确的[25],[36],[74],[90] 另外的推广和参考文献在[80]中可见到.

4.1 定理. 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ 且 $p \in M$ 是 f 的双曲不动点. 设 $A = Df_p: TM_p \to TM_p$. 则存在邻域 $V(p) \subset M$ 及 $U(0) \subset TM_p$, 以及同胚 $h: U \to V$ 使得

$$hA = fh.$$

注. 由于这是一局部问题. 利用局部卡方法, 我们可假设 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是一微分同胚, 以 0 为双曲不动点. 为了证明定理 4.1, 我们需要一些引理.

4.2 引理. 设 E 是 Banach 空间, 假定 $L \in \mathscr{L}(E, E)$ 满足 $\|L\| \leqslant a < 1$, 且 $G \in \mathscr{L}(E, E)$ 是一同构满足 $\|G^{-1}\| \leqslant a < 1$. 则

(a) $I + L$ 是同构且 $\|(I+L)^{-1}\| \leqslant 1/(1-a)$,

(b) $I+G$ 是同构且 $\|(I+G)^{-1}\|\leqslant a/(1-a)$.

引理 4.2 的证明. (a) 给定 $y\in E$, 由 $u(x)=y-L(x)$ 定义 u: $E\to E$, 则 $u(x_1)-u(x_2)=L(x_2-x_1)$, 因而 $\|u(x_1)-u(x_2)\|\leqslant a\|x_1-x_2\|$, 故 u 是一压缩, 因而 u 有唯一的不动点 $x\in E$, 即 $x=u(x)=y-L(x)$. 因此存在唯一的 $x\in E$, 使得 $(L+I)x=y$. 亦即 $I+L$ 是一双射. 设 $y\in E$ 有 $\|y\|=1$, 取 $x\in E$ 使得 $(I+L)^{-1}y=x$. 由于 $x+Lx=y$, 我们有 $\|x\|-a\|x\|\leqslant 1$, 因而 $\|x\|\leqslant 1/(1-a)$. 故 $\|(I+L)^{-1}\|\leqslant 1/(1-a)$.

(b) 首先注意 $I+G=G(I+G^{-1})$. 由于 $\|G^{-1}\|\leqslant a<1$, 故由 (a), $I+G^{-1}$ 是可逆的, 因而 $(I+G)^{-1}=(I+G^{-1})^{-1}G^{-1}$, 故

$$\|(I+G)^{-1}\|\leqslant\|(I+G^{-1})^{-1}\|\|G^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-a}\cdot a=\frac{a}{1-a}$$

引理得证. □

由于 $A=Df_0$ 是双曲同构, 存在不变分裂 $\mathbb{R}^m=E^s\oplus E^u$ 及 $\mathbb{R}^m$ 上一范数 $\|\cdot\|$, 使得

$$\|A^s\|\leqslant a<1,$$

此处 $A^s=A|E^s$: $E^s\to E^s$,

$$\|(A^u)^{-1}\|\leqslant a<1,$$

此处 $A^u=A|E^u$: $E^u\to E^u$.

设 $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 是由所有从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的有界连续映射组成的 Banach 空间, 具有一致范数: $\|u\|=\sup\{\|u(x)\|;\ x\in\mathbb{R}^m\}$. 由于 $\mathbb{R}^m=E^s\oplus E^u$, 我们有分解 $C_b^0(\mathbb{R}^m)=C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)\oplus C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$, 此处 $u=u^s+u^u$, 其中 $u^s=\pi_s\circ u$, $u^u=\pi_u\circ u$, 由自然射影 π_s: $E^s\oplus E^u\to E^s$ 和 π_u: $E^s\oplus E^u\to E^u$ 得出.

4.3 引理. 存在 $\varepsilon>0$, 使得若 $\varphi_1, \varphi_2\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 具有小于或等于 ε 的 Lipschitz 常数, 则 $A+\varphi_1$ 与 $A+\varphi_2$ 共轭.

证明. 我们必须找出一同胚 h: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, 满足方程

$$h(A+\varphi_1)=(A+\varphi_2)h. \tag{1}$$

我们用形如 $h=I+u$ 的解来试探, 此处 $u\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$, 则必须有

$$(I+u)(A+\varphi_1)=(A+\varphi_2)(I+u). \tag{2}$$

或 $$A+\varphi_1+u(A+\varphi_1)=A+Au+\varphi_2(I+u).$$

或等价地有

$$Au-u(A+\varphi_1)=\varphi_1-\varphi_2(I+u). \tag{3}$$

我们必须证明存在唯一的 $u\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 满足方程(3). 考虑线性算子

$$\mathscr{L}: C_b^0(\mathbb{R}^m)\to C_b^0(\mathbb{R}^m),$$

$$\mathscr{L}(u)=Au-u(A+\varphi_1).$$

我们断言: $\mathscr{L}$ 是可逆的, 且

$$\|\mathscr{L}^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|/(1-a).$$

事实上, $$\mathscr{L}=\overline{A}\mathscr{L}^*$$

此处 $\mathscr{L}^*: C_b^0(\mathbb{R}^m)\to C_b^0(\mathbb{R}^m)$, 由

$$\mathscr{L}^*(u)=u-A^{-1}u(A+\varphi_1)$$

给出, 而 $\overline{A}: C_b^0(\mathbb{R}^m)\to C_b^0(\mathbb{R}^m)$, 由

$$\overline{A}(u)=A\circ u$$

给出. 由于 $\overline{A}$ 是可逆的. 我们需证 $\mathscr{L}^*$ 是可逆的, 从而

$$\mathscr{L}^{-1}=\mathscr{L}^{*-1}\overline{A}^{-1}.$$

因为 E^s 与 E^u 在 A^{-1} 下不变, 故 $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ 和 $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$ 在 $\mathscr{L}^*$ 下不变. 我们可写成

$$\mathscr{L}^*=\mathscr{L}^{*s}\oplus\mathscr{L}^{*u},$$

此处 $$\mathscr{L}^{*s}=\mathscr{L}^*|C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s),$$

$$\mathscr{L}^{*u}=\mathscr{L}^*|C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u).$$

显然若 s 足够小, 则 $A+\varphi_1$ 是同胚. 由于 A 的双曲性, 因而算子

$$u^s\mapsto A^{-1}u^s(A+\varphi_1)$$

是可逆的, 且其逆

$$u^s\mapsto A^s u^s(A+\varphi_1)^{-1}$$

是压缩, 其范数不大于 $a<1$. 由引理 4.2 的(b), $\mathscr{L}^{*s}$ 是可逆的, 且

$$\|(\mathscr{L}^{*s})^{-1}\|\leqslant a/(1-a).$$

由引理 4.2 的(a), 我们也推出 $\mathscr{L}^{*u}$ 是可逆的, 且

$$\|(\mathscr{L}^{*u})^{-1}\|\leqslant 1/(1-a)=\max\{1/(1-a), a/(1-a)\},$$

故 $\mathscr{L}$ 是可逆的，且

$$\|\mathscr{L}^{-1}\| = \|\mathscr{L}^{*-1}\overline{A}^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|/(1-a).$$

断言得证.

现在考虑映射

$$\mu: C_b^0(\mathbb{R}^m) \to C_b^0(\mathbb{R}^m),\ \mu(u) = \mathscr{L}^{-1}[\varphi_1 - \varphi_2(I+u)].$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\mu(u_1) - \mu(u_2)\| &= \|\mathscr{L}^{-1}[\varphi_2(I+u_2) - \varphi_2(I+u_1)]\| \\ &\leqslant \|A^{-1}\|(1-a)^{-1}\varepsilon\|u_2 - u_1\|.\end{aligned}$$

若 ε 足够小，使得 $\varepsilon\|A^{-1}\|(1-a)^{-1}<1$，则 μ 是一压缩，从而在 $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 中有唯一的不动点，设为 u. 由于 $u\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 是(3)的解当且仅当它是 μ 的不动点，我们断定(3)在 $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 中有唯一的解. 还需证明 $I+u$ 是同胚. 为此我们首先注意，上述方法也证明方程

$$(A+\varphi_1)(I+v) = (I+v)(A+\varphi_2)$$

也有唯一的解 $v\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$. 我们断言

$$(I+u)(I+v) = (I+v)(I+u) = I.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(I+u)(I+v)(A+\varphi_2) &= (I+u)(A+\varphi_1)(I+v) \\ &= (A+\varphi_2)(I+u)(I+v).\end{aligned}$$

另一方面，由于

$$(I+u)(I+v) = I+v+u(I+v)$$

而

$$w = v+u(I+v) \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$$

且

$$I(A+\varphi_2) = (A+\varphi_2)I.$$

由方程

$$(I+w)(A+\varphi_2) = (A+\varphi_2)(I+w)$$

的解的唯一性推出

$$(I+u)(I+v) = I.$$

类似地有

$$(I+v)(I+u) = I.$$

这证明 $I+u$ 是同胚，它使 $A+\varphi_1$ 与 $A+\varphi_2$ 共轭，引理得证. □

4.4 引理. 给定 $\varepsilon>0$，存在0的邻域 U 及 $f|U$ 到 $\mathbb{R}^m$ 上的扩张，具有形式 $A+\varphi$，此处 $\varphi\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ 具有不大于 ε 的 Lipschitz 常

数.

证明. 设 $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一 C^∞ 函数, 它具有下列性质:[1]

$$\alpha(t)=0,\quad 若 t\geqslant 1;$$

$$\alpha(t)=1,\quad 若 t\leqslant \frac{1}{2};$$

$$|\alpha'(t)|<K,\ \forall t\in\mathbb{R},\ K>2.$$

设 $f=A+\psi$ 具有 $\psi(0)=0$ 及 $D\psi_0=0$. 设 B_e 是以原点为中心, e 为半径的球, 使得对 $x\in B_e$ 有 $\|D\psi_x\|<\varepsilon/2K$. 定义 $\varphi: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为 $\varphi(x)=\alpha(\|x\|/e)\psi(x)$. 显然若 $\|x\|\geq e$, $\varphi(x)=0$. 我们证明 φ 满足引理的条件, 事实上, 由于对 $\|x\|\leq e/2$ 有 $\varphi(x)=\psi(x)$, 故 $A+\varphi$ 是 $f|B_{e/2}$ 的一扩张, 另一方面, 若 x_1, $x_2\in B_e$, 有

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\| &= \|[\alpha(\|x_1\|/e)\psi(x_1)-\alpha(\|x_2\|/e)\psi(x_2)]\|\\ &= \|[\alpha(\|x_1\|/e)-\alpha(\|x_2\|/e)]\psi(x_1)\\ &\quad +\alpha(\|x_2\|/e)[\psi(x_1)-\psi(x_2)]\|\\ &\leqslant (K\|x_1-x_2\|/e)(\varepsilon/2K)\|x_1\|\\ &\quad +(\varepsilon/2K)\|x_1-x_2\|\\ &\leqslant \varepsilon\|x_1-x_2\|.\end{aligned}$$

若 $x_1\in B_e$ 而 $x_2\notin B_e$, 我们有

$$\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|\leqslant\varepsilon/2\|x_1-x_2\|\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|,$$

若 x_1, $x_2\notin B_e$, 则 $\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|=0\leqslant\varepsilon\|x_1-x_2\|$. 故 φ 有不大于 ε 的 Lipschitz 常数. 引理得证. □

定理 4.1 的证明. 设 $\varepsilon>0$ 如引理 4.3. 设 $A+\varphi$ 是 $f|U(0)$ 的扩张, 此处 $U(0)$ 是 0 的邻域, 而 φ 有不大于 ε 的 Lipschitz 常数, 由引理 4.3, 存在同胚 $h: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, 使得 $hA=(A+\varphi)h$. 因而 $hA=fh$ 在 0 的一邻域中成立. □

注. (1) 引理 4.3 中 $A+\varphi_1$ 与 $A+\varphi_2$ 之间的共轭, 在所有与恒等映射有有限距离的映射中是唯一的. 然而不满足后一条件的共轭却有无穷多. 例如, 考虑一压缩 $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(0)=0$. 假定 $\varphi(1)=a>0$ 而 $\varphi(-1)=b<0$. 任取同胚 h: $[-1, b]\cup[a, 1]\to$

1) α 还应具有性质: $0\leqslant\alpha(t)\leqslant 1$. ——译者注

$[-1, b]\cup[a, 1]$满足 $h(-1)=-1$, $h(b)=b$, $h(a)=a$, $h(1)=1$. 令 $h(0)=0$ 及 $h(x)=\varphi^n h\varphi^{-n}(x)$, 将 h 扩张到整个实直线, 此处 $n\in\mathbb{Z}$, 使得 $\varphi^{-n}(x)\in[-1, b]\cup[a, 1]$. 这样, 有多少从$[-1, b]\cup[a, 1]$到自身的同胚, 就能得到方程 $h\varphi=\varphi h$ 的多少解.

(2) 即使我们要求 A 与 f 之间的共轭与恒等映射靠近, 但是它不是唯一的, 因为它依赖于 f 到整个空间 $\mathbb{R}^m$ 的扩张 $A+\varphi$.

由定理 4.1, 我们来证明: 双曲线性同构在 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ 中是局部稳定的. 事实上, 我们将在下一节见到, 双曲同构在 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ 中是大范围稳定的.

4.5 命题. 设 A 是双曲同构. 则存在 $\delta>0$, 使得若 $B\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ 且当 $\|B-A\|<\delta$ 时, B 与 A 局部共轭.

证明. 我们要找出一同胚 $h: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, 使 A 与 $B|U$ 的扩张共轭, 此处 U 是原点的一邻域.

设 $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一 C^∞ 映射, 具有性质:

$$\alpha(t)=1,\ 若\ |t|\leqslant 1;$$
$$\alpha(t)=0,\ 若\ |t|\geqslant 2;$$
$$\alpha(\mathbb{R})\subset[0, 1].$$

将 B 写成 $A+(B-A)$. 设 $\varphi: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, 由 $\varphi(x)=\alpha(\|x\|)\cdot(B-A)(x)$ 定义. 则我们有 $\varphi|B_1=(B-A)|B_1$, 此处 B_1 是以 0 为中心、1 为半径的球, 而若 $\|x\|\geqslant 2$, 则 $\varphi(x)=0$. 对所有 $x\in\mathbb{R}^m$, $\|D\varphi_x\|\leqslant K\|B-A\|+\|B-A\|$, 此处 $K=\sup\{|\alpha'(t)|; t\in\mathbb{R}\}$大于 1. 给定 $\varepsilon>0$, 取 $\delta<\varepsilon/2K$ 因此 $\|D\varphi_x\|<\varepsilon$. 故 φ 有小于 ε 的 Lipschitz 常数. 由引理 4.3 存在一同胚 $h: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, 使得

$$hA=(A+\varphi)h.$$

由于 $A+\varphi$ 是 B 的扩张, 故 h 是 A 与 B 之间的一局部共轭. □

4.6 定理. 设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$, $r\geqslant 1$. 且设 $p\in M$ 是 f 的双曲不动点, 则 f 在 p 点局部稳定.

证明. 由命题 3.5, 存在邻域 $\tilde{\mathscr{N}}(f)$ 及 $W(p)$ 和一连续映射 $\rho: \tilde{\mathscr{N}}(f)\to W$, 对每一 $g\in\tilde{\mathscr{N}}(f)$, 映射 ρ 对应 g 在 W 中的唯一不动点 $\rho(g)$, 且此不动点是双曲的. 若取足够小的邻域 $\mathscr{N}(f)\subset$

$\mathcal{N}(f)$，我们有 Df_p 靠近 $Dg_{\rho(p)}$，因而由命题 4.5，这两个线性同构局部共轭．由于 f 局部共轭于 Df_p，g 局部共轭于 $Dg_{\rho(p)}$，由传递性得出 f 局部共轭于 g． □

我们现在推广这些结果到向量场．设 V 是 0 在 $\mathbb{R}^m$ 中的邻域且设 $X: V\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 向量场，$r\geqslant 1$．我们已证明，若 $L=DX_0$ 是双曲线性向量场，则 0 是 X 的双曲奇点，我们将证明，若 0 是 X 的双曲奇点，则在 0 的一邻域中 X 的轨道与线性向量场 L 的轨道有相同的拓扑性态．为此我们需要一些引理．

4.7 引理(Gronwall 不等式)．设 u, v: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是非负连续函数，对某 $\alpha\geqslant 0$，满足

$$u(t)\leqslant\alpha+\int_a^t u(s)v(s)\,ds,\quad \forall t\in[a, b].$$

则
$$u(t)\leqslant\alpha\exp\left[\int_a^t v(s)\,ds\right].$$

证明．设 ω: $[a, b]\to\mathbb{R}$ 是映射

$$\omega(t)=\alpha+\int_a^t u(s)v(s)\,ds.$$

先假定 $\alpha>0$．我们有 $\omega(a)=\alpha$ 且 $\omega(t)\geqslant\alpha>0$ 对所有 $t\in[a, b]$ 成立．由于 $\omega'(t)=v(t)u(t)\leqslant v(t)\omega(t)$，我们有 $\omega'(t)/\omega(t)\leqslant v(t)$，从 a 到 t 积分得

$$\omega(t)/\alpha\leqslant\exp\left[\int_a^t v(s)\,ds\right].$$

故
$$u(t)\leqslant\omega(t)\leqslant\alpha\exp\left[\int_a^t v(s)\,ds\right].$$

若 $\alpha=0$，上面的情况表明，对所有 $\alpha_1>0$，

$$u(t)\leqslant\alpha_1\exp\left[\int_a^t v(s)\,ds\right].$$

因而 $u(t)=0$ 故不等式仍成立． □

4.8 引理．设 Y: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 向量场，具有 $Y(0)=0$，且满足具有常数 K 的 Lipschitz 条件．则 Y 的流定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ 上，且对所有 x, $y\in\mathbb{R}^m$，$\|Y_t(x)-Y_t(y)\|\leqslant e^{K|t|}\|x-y\|$．

证明．设 $x\in\mathbb{R}^m$．假定 Y 的过点 x 的积分曲线的极大区间

(a, b)具有 $b<\infty$，我们将推出矛盾，设 $\varphi: (a, b)\to\mathbb{R}^m$ 是过点 x 的积分曲线．我们有

$$\varphi(t)=x+\int_0^t Y(\varphi(s))ds.$$

因此若 $t\geqslant 0$，

$$\|\varphi(t)\|\leqslant\|x\|+\int_0^t \|Y(\varphi(s))\|ds\leqslant\|x\|+\int_0^t K\|\varphi(s)\|ds.$$

由 Gronwall 不等式，我们得到

$$\|\varphi(t)\|\leqslant e^{K|t|}\|x\|\leqslant e^{Kb}\|x\|,\quad \text{若 } t\geqslant 0.$$

设 $t_n\to b$，考虑序列 $\{\varphi(t_n)\}$，它的项都属于以 0 为中心且半径 $M=e^{Kb}\|x\|$ 的闭球内．由于

$$\varphi(t_n)-\varphi(t_m)=\int_{t_m}^{t_n} Y(\varphi(s))ds,$$

我们有
$$\|\varphi(t_n)-\varphi(t_m)\|\leqslant KM|t_n-t_m|.$$

故 $\varphi(t_n)$是一 Cauchy 序列，因而收敛到一点 $y\in\mathbb{R}^m$．Y 围绕 y 的局部流使我们能将积分曲线扩张到 b 的右边，这与我们最初的假定矛盾．故 Y 的流定义在整个 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ 上．由于

$$Y_t(x)-Y_t(y)=x-y+\int_0^t [Y(Y_s(x))-Y(Y_s(y))]ds,$$

我们推出：对 $t\geqslant 0$

$$\|Y_t(x)-Y_t(y)\|\leqslant\|x-y\|+\int_0^t K\|Y_s(x)-Y_s(y)\|ds.$$

由 Gronwall 不等式，我们有

$$\|Y_t(x)-Y_t(y)\|\leqslant e^{K|t|}\|x-y\|,\quad \text{若 } t\geqslant 0.$$

对于 $t\leqslant 0$，将这个讨论用到向量场 $-Y$，我们得出同样的不等式． □

4.9 引理． 设 $X: V\to\mathbb{R}^m$ 是 C^r 向量场，具有 $X(0)=0$．设 $L=DX_0$．给定 $\varepsilon>0$，则存在一 C^r 向量场 $Y: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，具有下列性质：

(1) 场 Y 是 Lipschitz 的，具有 Lipschitz 常数 K，故由 Y 导出的流定义在整个 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ 上；

(2) 在球 B_l 之外，$Y=L$；

(3) 存在一个包含 0 的开集 $U\subset V$，使得在 U 上 $Y=X$；

(4) 若 $Y_t=L_t+\varphi_t$，则存在 $M>0$，使得对所有 $t\in[-2, 2]$，$\|\varphi_t\|\leqslant M$，且 φ_1 有不大于 ε 的 Lipschitz 常数．并且 $D(\varphi_1)_0=0$，或等价地 $D(Y_1)_0=e^L=L_1$．

证明．因 $L=DX_0$，我们有 $X=L+\psi$，此处 $\psi: V\to\mathbb{R}^m$ 是一 C^r 映射，满足 $\psi(0)=0$ 及 $D\psi_0=0$．设 $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一 C^∞ 映射，满足

$$\alpha(\mathbb{R})\subset[0, 1],$$

$$\alpha(t)=1,\ 若 |t|\leqslant\frac{l}{2},$$

$$\alpha(t)=0,\ 若 |t|\geqslant l.$$

设 $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，定义如下：

$$\tilde{\varphi}(x)=\alpha(\|x\|)\cdot\psi(x),\quad 若 x\in V,$$

$$\tilde{\varphi}(x)=0,\ 若 x\in\mathbb{R}^m-V.$$

给定 $\delta>0$，我们可选取 $l>0$，使得 $\tilde{\varphi}$ 是 C^r 且有不超过 δ 的 Lipschitz 常数．显然在 $B_{l/2}$ 上 $\tilde{\varphi}=\psi$，而在 B_l 之外 $\tilde{\varphi}=0$．设 Y: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是由 $Y=L+\tilde{\varphi}$ 定义的向量场．同样，显然在 $B_{l/2}$ 上 $Y=X$，而在 B_l 之外 $Y=L$，并且 Y 满足(1)．还需证明条件(4)成立．事实上，由引理 4.8，对 $t\in[-2,2]$，$\|Y_t(x)-Y_t(y)\|\leqslant e^{2K}\|x-y\|$．令 $\varphi_t=Y_t-L_t$．由于对于 $t\in[-2, 2]$，Y_t 与 L_t 在 $B(0, l)$ 中有界且在 $B(0, l)$ 之外 $Y=L$，因而存在 M，使得对 $t\in[-2, 2]$，$\|\varphi_t\|<M$．我们也有

$$\varphi_t(x)-\varphi_t(y)=\int_0^t[\tilde{\varphi}(Y_s(x))-\tilde{\varphi}(Y_s(y))]ds$$

$$+\int_0^t L(\varphi_s(x)-\varphi_s(y))\,ds.$$

由 Gronwall 不等式，我们推出

$$\|\varphi_t(x)-\varphi_t(y)\|\leqslant 2e^{2k}\delta e^{2\|L\|}\|x-y\|,\ \forall t\in[-2, 2].$$

只要 δ 足够小，条件(4)就成立．最后我们证明 $D(\varphi_1)_0=0$．我们必需证明：给定 $\rho>0$，存在 $r>0$，使得对 $\|x\|\leqslant r$，$\|\varphi_1(x)\|\leqslant\rho\|x\|$．

由于$(D\tilde{\varphi})_0=0$，我们可选取r使得对$\|z\|<r$，$\|\tilde{\varphi}(z)\|\leqslant\eta\|z\|$，此处$\eta<\rho e^{-K}e^{-\|L\|}$。由上面的表达式，我们有

$$\varphi_1(x)=\int_0^1\tilde{\varphi}(Y_s(x))ds+\int_0^1 L(\varphi_s(x))ds.$$

根据$\|Y_s(x)\|\leqslant e^K\|x\|$对$0\leqslant s\leqslant 1$成立，由Gronwall不等式，我们得到

$$\|\varphi_1(x)\|\leqslant\eta e^K\|x\|e^{\|L\|}\leqslant\rho\|x\|.$$

引理4.9证毕. □

4.10 定理. 设$X: V\to\mathbb{R}^m$是C^r向量场，而0是X的双曲奇点. 令$L=Dx_0$. 则X在0局部等价于L.

证明. 设$Y: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$是如在引理4.9中的$C^r$向量场. 由于在0的邻域$U$中$Y=X$. 在$U$上的恒等映射使$X$轨道变为$Y$轨道. 故$Y$局部等价于$X$. 还需证明$Y$局部等价于$L$. 事实上，我们将证明：存在$\mathbb{R}^m$的一同胚使流$Y_t$与$L_t$共轭.

由引理4.9，$Y_t=L_t+\varphi_t$. 由于$DY_0=L$，我们有$D(Y_1)_0=e^L=L_1$. 故微分同胚$Y_1=L_1+\varphi_1$以原点为双曲不动点，且φ_1有不大于s的Lipschitz常数，由引理4.3，存在唯一的与恒等映射有有限距离(即$h=I+u$，$u\in C_b^0(\mathbb{R}^m)$)的同胚$h: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，满足$hY_1=L_1h$.

定义$H: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$如下：

$$H=\int_0^1 L_{-t}hY_t\,dt.$$

显然H是连续映射，且引理4.9的条件(4)保证H与恒等映射有有限距离. 我们证明：

$$L_sH=HY_s\text{ 对所有 }s\in\mathbb{R}\text{ 成立.}$$

为此只需考虑$s\in[0,1]$就够了. 我们有

$$L_{-s}HY_s=L_{-s}\left(\int_0^1 L_{-t}hY_t\,dt\right)Y_s=\int_0^1 L_{-(s+t)}hY_{t+s}\,dt.$$

令$u=t+s-1$，我们得

$$\int_0^1 L_{-(s+t)}hY_{t+s}dt=\int_{-1+s}^{s}L_{-u-1}hY_{u+1}du$$

$$=\int_{-1+s}^{0}L_{-u}L_{-1}hY_1Y_u du+\int_0^s L_{-(u+1)}hY_{u+1}du^{1)}$$

在第一项中令 $v=u+1$ 而在第二项中令 $v=u$. 利用 $L_{-1}hY_1=h$, 我们推出

$$L_{-s}hY_s=\int_0^s L_{-v}hY_v dv+\int_s^1 L_{-v}hY_v dv=H.$$

这证明 H 是与恒等映射有有限距离的连续映射, 且它使流 L_t 与 Y_t 共轭, 还需证明 H 是同胚, 事实上, 由于 $L_1H=HY_1$ 和 $L_1h=hY_1$, 故由此方程解的唯一性证明 $H=h$, 定理得证. □

4.11 定理. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 且设 $p\in M$ 是 X 的双曲奇点, 则 X 在 p 点局部稳定.

证明. 我们已经证明: 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中存在邻域 $\mathscr{N}(X)$ 和在 M 中存在点 p 的邻域 U, 使得任一向量场 $Y\in\mathscr{N}(X)$ 在 U 中有唯一双曲奇点 p_Y. 并且当 $\mathscr{N}(X)$ 足够小时, p_Y 和 p 有相同的指标. 因而线性向量场 DX_p 与 DY_{p_Y} 拓扑等价. 由于 X 局部等价于 DX_p, 而 Y 局部等价于 DY_{p_Y}, 定理得证. □

§5. 局 部 分 类

我们已经证明: 由所有奇点都是双曲的向量场组成的子集 $\mathscr{G}_1(M)\subset\mathscr{X}^r(M)$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中开且稠, 而且这些向量场在 M 的每一点都是局部稳定的. 现在我们来描述属于 $\mathscr{G}_1$ 的向量场的局部拓扑性态的所有可能类型.

考虑在 $\mathbb{R}^m$ 上的线性场 $L_0, L_1, \cdots, L_m$, 关于标准基底, 它们可表为矩阵形式:

$$L_0=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\end{pmatrix},$$

1) 上式写成"$=\int_{-1+s}^{0}L_{-(u+1)}hY_{u+1}du+\int_0^s L_{-u}L_{-1}hY_1Y_u du$"较好.——译者注

$$L_1=\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$L_m=\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

若 L 是 $\mathbb{R}^m$ 上一双曲线性向量场，则 L 共轭于 L_i，此处 i 是 L 的指标.

设 $C: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是常向量场，由 $C(x)=(1, 0, \cdots, 0)$ 给出. 我们可以将前几节证明的结果总结成下述定理.

5.1 定理. 设 $X \in \mathscr{G}_1(M)$ 且取 $p \in M$.

(a) 若 p 是 X 的正则点，则 X 在 p 点局部等价于在 0 点的常向量场.

(b) 若 p 是 X 的奇点，则 X 局部等价于 L_i，此处 i 是 p 的指标.

证明. (a) 这由管道流定理可推出.

(b) 应用 Grobman-Hartman 定理和命题 2.15. □

现在考虑由 M 的所有 C^r 微分同胚组成的空间 $\mathrm{Diff}^r(M)$. 我们曾证明：由那些不动点都是双曲的微分同胚组成的集合 $G_1(M) \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中开且稠. 现在我们来描述 G_1 中一微分同胚在其不动点附近的轨道的拓扑性态的所有可能类型. 由 Hartman 和 Grobman 的定理，只要将双曲线性同构分类就够了.

5.2 命题. 设 $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ 是双曲线性同构. 存在 $\varepsilon>0$ 使得若 $B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ 满足 $\|A-B\|<\varepsilon$，则 B 与 A 共轭.

证明. 由命题 4.5，B 局部共轭于 A；即存在同胚 $h: V(0) \to U(0)$ 使得 $hA=Bh$. 设 E^s 与 E^u 是 A 的稳定与不稳定子空间，且设 $E^{s'}$ 与 $E^{u'}$ 是 B 的相应的子空间. 设 $V^s=V(0) \cap E^s$, $V^u=V(0) \cap E^u$, $U^{s'}=U(0) \cap E^{s'}$ 和 $U^{u'}=U(0) \cap E^{u'}$. 由 h 的连续性，有 $h(V^s)=U^{s'}$, $h(V^u)=U^{u'}$. 我们要定义一同胚 $h: E^s \to E^{s'}$，使

$A^s=A|E^s$ 与 $B^{s'}=B|E^{s'}$ 共轭. 若 $x\in V^s$, V^s 在 E^s 中是原点的一邻域, 令 $h^s(x)=h(x)\in E^{s'}$. 若 $x\in E^s-V^s$, 由于当 $n\to\infty$ 时, $A^n(x)\to 0$, 故存在 $r\in\mathbb{N}$ 使得 $A^r(x)\in V^s$. 我们令 $h^s(x)=B^{-r}hA^r(x)$. 由于 h 在 V^s 中使 A 与 B 共轭, 我们立即看出 h^s 不依赖于 r 的选取. 也容易验证 h^s 是同胚且使 A^s 与 $B^{s'}$ 共轭. 类似地, 我们定义同胚 $h^u: E^u\to E^{u'}$ 使 A 与 B 共轭轭[1], 故我们可由 $\tilde{h}(x^s+x^u)=h^s(x^s)+h^u(x^u)$. 定义 $\tilde{h}$: $E^s\oplus E^u\to E^{s'}\oplus E^{u'}$. 显然 $\tilde{h}$ 是同胚且使 A 与 B 共轭. □

下一命题我们留给读者证明.

5.3 命题. 设 A 与 B 是 $\mathbb{R}^m$ 的双曲同构. 设 E^s 与 E^u 分别是 A 的稳定与不稳定子空间, 而 $E^{s'}$, $E^{u'}$ 是 B 的相应的子空间. 则 A 与 B 共轭当且仅当 $A^s=A|E^s$ 与 $B^{s'}=B|E^{s'}$ 共轭且 $A^u=A|E^u$ 与 $B^{u'}=B|E^{u'}$ 共轭. □

我们想对两个双曲同构共轭给出一个必要充分条件.

5.4 命题. 设 A_1 与 A_2 是 $\mathbb{R}^m$ 的同构, 在标准基中, 它们由矩阵

$$\tilde{A}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & 0 \\ & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & & 0 \\ & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

表示. 设 A 是指标为 m 的双曲同构, 若 A 保持定向, 即 $\det(A)>0$, 则 A 与 A_1 共轭. 若 A 逆转定向, 即 $\det(A)<0$, 则 A 与 A_2 共轭.

证明. 由局部稳定性, A 与 A 的某邻域中的每一同构共轭.

---

1) 精确地说是使 $A^u=A|E^u$ 与 $B^{u'}=B|E^{u'}$ 共轭. ——译者注

因而我们可通过假定 A 可对角化来简化讨论.

设 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一基底，在这一基下表示 A 的矩阵 $\widetilde{A}$ 是实标准形式：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_{s'} & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \mu_{s''} & & \\ & & & & & & B_1 & \\ & 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & B_{s'''} \end{pmatrix},$$

此处 $-1<\lambda_i<0$, $0<\mu_i<1$ 而

$$B_i=\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

具有 $\beta_i\neq 0$ 和 $\alpha_i^2+\beta_i^2<1$.

我们断言：若两个双曲同构 B_0 与 B_1，属于在 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ 中开的双曲同构空间的同一连通分支，则它们共轭. 事实上，设 α: $[0, 1]\to GL(\mathbb{R}^m)$ 是一连续曲线，使得对所有 $t\in[0, 1]$，$\alpha(t)$ 是双曲的，且 $\alpha(0)=B_0$, $\alpha(1)=B_1$. 由局部稳定性，对每一 $t\in[0,1]$，$\alpha(t)$ 有一邻域 $V_t\in GL(\mathbb{R}^m)$ 使得 V_t 中的每一同构与 $\alpha(t)$ 共轭. 由于 $\alpha([0,1])$ 紧致，存在 $t_1=0<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k=1$ 使得 $V_{t_1}\cup\cdots\cup V_{t_k}\supset\alpha([0, 1])$. 由于 $V_{t_i}\cap V_{t_{i+1}}\neq\phi$，故 $\alpha(t_i)$ 与 $\alpha(t_{i+1})$ 共轭；因此 B_0 与 B_1 共轭.

由此断言，只需找到经过双曲同构的连续道路 α: $[0, 1]\to GL(\mathbb{R}^m)$，使得在基底 $v_1, \cdots, v_m$ 下，$\alpha(0)$ 的矩阵是 $\widetilde{A}$，而 $\alpha(1)$ 的矩阵是 $\widetilde{A}_1$ 或 $\widetilde{A}_2$. 这是因为同构 A_1 与 A_2 相似于(因而共轭于)在基底 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 之下分别表为 $\widetilde{A}_1$ 与 $\widetilde{A}_2$ 的同构. 首先我们构造一连续道路 α: $[0, 1]\to GL(\mathbb{R}^m)$ 使得 $\alpha(0)=A$，对所有 $t\in[0,1]$，$\alpha_1(t)$ 是双曲的，且

$$\alpha_1(1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \overset{s''+s'''}{\ddots} & \\ 0 & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

然后我们构造一连续道路 α_2: $[0, 1]\to GL(\mathbb{R}^m)$，使得 $\alpha_2(0)=\alpha_1(1)$而 $\alpha_2(1)=A_1$ 或 A_2．令

$$\alpha_1(t)=\begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_{s'}(t) & & & & & & \\ & & & \mu_1(t) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mu_{s''}(t) & & & \\ & & & & & & B_1(t) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & B_{s'''}(t) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_i(t)=(1-t)\lambda_i-\left(\frac{1}{2}\right)t,$$

$$\mu_i(t)=(1-t)\mu_i+\left(\frac{1}{2}\right)t,$$

$$B_i(t)=\begin{pmatrix} \cos(\omega_i t) & \sin(\omega_i t)\\ -\sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i\\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix},$$

$$若\ t\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right],$$

而

$$B_i(t)=\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(2t-1)+2(1-t)\sqrt{(\alpha_i^2+\beta_i^2)} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}(2t-1)+2(1-t)\sqrt{(\alpha_i^2+\beta_i^2)} \end{pmatrix},$$

$$\text{若 } t\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right],$$

此处 $\cos\left(\frac{1}{2}\omega_i\right)=\alpha_i/\sqrt{(\alpha_i^2+\beta_i^2)}$

且 $\sin\left(\frac{1}{2}\omega_i\right)=-\beta_i/\sqrt{(\alpha_i^2+\beta_i^2)}$.

易证对所有 $t\in[0,\ 1]$, $-1<\lambda_i(t)<0$, $0<\mu_i(t)<1$ 且 $B_i(t)$ 的特征值的模小于 1. 这蕴涵着对所有 $t\in[0,\ 1]$, $\alpha_1(t)$ 是双曲的，由于 α_1 连续，我们推出 $\alpha_1(0)=A$ 与其矩阵为

$$\begin{pmatrix} \overbrace{-\frac{1}{2} \ \ddots \ -\frac{1}{2}}^{s'} & & 0 \\ & & \overbrace{\frac{1}{2} \ \ddots \ \frac{1}{2}}^{s''+s'''} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

的 $\alpha_1(1)$ 共轭.

现在我们构造曲线 α_2. 假定 A 逆转定向，即 $\det(A)<0$. 由于 α_1 连续，且对所有 $t\in[0,\ 1]$, $\alpha_1(t)$ 是一同构. 我们有 $\det(\alpha_1(t))<0$ 对所有 $t\in[0,\ 1]$ 成立，特别地 $\det(\alpha_1(1))<0$. 因此在 $\alpha_1(1)$ 的对角线上的负元素的数目 s' 是奇数. 令

$$\alpha_2(t)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & & & 0 \\ & C_1(t) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & C_{(s'-1)/2}(t) & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

此处 $$C_j(t)=\begin{pmatrix}\cos(\pi t) & \sin(\pi t)\\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

因而有 $$C_j(0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad C_j(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

并且 $C_j(t)$ 的特征值有形式 $-\frac{1}{2}e^{\pi it}$，因而对所有 $t\in[0,1]$ 其模小于 1．由于 $\alpha_2(0)=\alpha_1(1)$ 且 $\alpha_2(1)$ 由矩阵 $\tilde{A}_2$ 表示，故 A 与 A_2 共轭．类似地，若 $\det(A)>0$，则 A 与 A_1 共轭．利用如同在[64]或[88]中所阐述的度理论，我们可以证明 A_1 不与 A_2 共轭．事实上，若 h 是一同胚，使 A_1 与 A_2 共轭，我们有

$$\begin{aligned}\deg h&=(\deg h)(\deg A_1)=\deg(hA_1)=\deg(A_2h)\\&=(\deg A_2)(\deg h)=-\deg h.\end{aligned}$$

由于 $\deg h=\pm1$，这是一个矛盾．□

注．若 A 是指标为 0 的双曲同构，则根据 $\det(A)>0$ 或 $\det(A)<0$，A 分别与下列同构

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & & 0\\ & 2 & \\ & & \ddots\\ 0 & & & 2\end{pmatrix}$$

或 $$A_2=\begin{pmatrix}-2 & & 0\\ & 2 & \\ & & \ddots\\ 0 & & & 2\end{pmatrix}$$

之一共轭．它的证明和命题 5.4 的证明完全相似．

现在，我们利用局部共轭的等价关系将微分同胚的双曲不动点分类．

5.5 定理． 设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 且假定 $p\in M$ 是 f 的双曲不动点．则 f 在 p 点局部共轭于 $\mathbb{R}^m$ 的下列线性同构 A_i^j 之一，此处 $m=$

$\dim M$. 同构 A_i^j, $0\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant 4$, 具有指标 i 且在 $\mathbb{R}^m$ 的标准基底中表为矩阵

$$A_0^1=A_0^2=\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}, \quad A_0^3=A_0^4=\begin{pmatrix} -2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_i^1=\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{1}{2} & & & }^{i} & & & 0 \\ & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad A_i^2=\begin{pmatrix} \overbrace{-\frac{1}{2} & & & }^{i} & & & 0 \\ & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_i^3=\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{1}{2} & & }^{i} & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_i^4=\begin{pmatrix} \overbrace{-\frac{1}{2} & & & }^{i} & & & & 0 \\ & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & -2 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^1_m = A^3_m = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^2_m = A^4_m = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

证明. 由 Hartman 和 Grobman 定理，以及命题 5.3 和命题 5.4，立即得证. □

§6. 不 变 流 形

设 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$，且假定 $p \in M$ 是 f 的双曲不动点. 在 M 中以 p 为 ω 极限的点的集合 $W^s(p)$ 称为 p 的**稳定流形**，而以 p 为 α 极限的点的集合 $W^u(p)$ 称为 p 点的**不稳定流形**. 显然 $W^s(p)$ 与 $W^u(p)$ 在 f 之下不变. 在这一节中，我们将利用 p 的双曲性，来描述这些集合的构造，且将分析它们在微分同胚 f 经过扰动时的变化方式. 类似的定义和结果对向量场的奇点成立.

例 1. 若 $A \in GL(\mathbb{R}^m)$ 是双曲同构，则存在一不变分裂 $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$，使得对 $q \in E^s$，当 $n \to \infty$ 时，$A^n(q) \to 0$，而对 $q \in E^u$，当 $n \to \infty$ 时，$A^{-n}(q) \to 0$. 并且对任何另外的 q，对 $n \to +\infty$ 以及 $n \to -\infty$，都有 $\|A^n(q)\| \to \infty$. 因而 $W^s(0) = E^s$，$W^u(0) = E^u$.

假定 $M \subset \mathbb{R}^k$，且设 d 是由 $\mathbb{R}^k$ 导出的 M 的度量. 对于 $\beta > 0$ 我们记 $B_\beta \subset M$ 为以 p 为中心，β 为半径的球.

定义. 集合

$$W^s_\beta(p) = \{q \in B_\beta;\ f^n(q) \in B_\beta,\ \forall n \geqslant 0\},$$
$$W^u(p) = \{q \in B_\beta;\ f^{-n}(q) \in B_\beta,\ \forall n \geqslant 0\}$$

分别称为 p 点的、**大小为 β 的局部稳定和不稳定流形**.

如上所述，$\mathbb{R}^s$ 到 M 内的拓扑浸入是一连续映射 $F: \mathbb{R}^s \to M$，使得每一点 $x \in \mathbb{R}^s$ 有一邻域 V 具有以下性质：F 在 V 上的限制 $F|V$ 是到它的像集的同胚. 此时我们称 $F(\mathbb{R}^s) \subset M$ 为 s 维浸入拓扑子流形. $\mathbb{R}^s$ 到 M 内的拓扑嵌入是一单射拓扑浸入，而且是

到其像上的同胚.

6.1 命题. 若 $\beta>0$ 充分小,我们有:

(1) $W_\beta^s(p)\subset W^s(p)$ 且 $W_\beta^u(p)\subset W^u(p)$; 亦即那些在 p 的一邻域的点, 若其正(负)半轨保持在此邻域中, 则以 p 为 ω 极限(α 极限);

(2) $W_\beta^s(p)$ ($W_\beta^u(p)$) 是 M 中一嵌入拓扑圆盘,其维数与 $A=Df_p$ 的稳定(不稳定)子空间的维数相同.

(3) $W^s(p)=\bigcup\limits_{n\geq 0}f^{-n}(W_\beta^s(p))$ 且 $W^u(p)=\bigcup\limits_{n\geq 0}f^n(W_\beta^u(p))$. 因此存在一单射拓扑浸入 φ_s: $E^s\to M$ (φ_u: $E^u\to M$), 其像为 $W^s(p)$ ($W^u(p)$), 此处 E^s 与 E^u 分别是 $A=Df_p$ 的稳定与不稳定子空间.

证明. (1)与(2): 由 Grobman-Hartman 定理, 在 TM_p 中存在 0 的一邻域 U, 以及一同胚 h: $B_\beta\to U$, 使 f 与同构 A 共轭. 由于 A 是双曲同构, 因而若 $x\in U$ 对所有 $n\geq 0$ 有 $A^n(x)\in U$, 则 $x\in E^s$ 且当 $n\to\infty$ 时, $A^n(x)\to 0$. 设 $q\in W_\beta^s(p)$. 由于对 $n\geq 0$, $f^n(q)\in B_\beta$, 且 $hf^n(q)=A^nh(q)$, 我们有 $A^nh(q)\in U$ 对 $n\geq 0$ 成立, 因此 $A^nh(q)\to 0$. 故 $f^n(q)=h^{-1}A^nh(q)$ 收敛到 $p=h^{-1}(0)$, 这证明 $W_\beta^s(p)\subset W^s(p)$. 并且, $h^{-1}(E^s\cap U)=W_\beta^s(p)$, 故(2)得证. 类似地, $W_\beta^u(p)\subset W^u(p)$ 且 $W_\beta^u(p)=h^{-1}(U\cap E^u)$.

(3) 由于 $W^s(p)$ 在 f 下不变且 $W_\beta^s(p)\subset W^s(p)$, 我们有 $f^{-n}(W_\beta^s(p))\subset W^s(p)$ 对所有 n 成立, 故 $\bigcup\limits_{n\geq 0}f^{-n}(W_\beta^s(p))\subset W^s(p)$. 另一方面, 若 $q\in W^s(p)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(q)=p$, 故存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得对所有 $n\geq n_0$, $f^n(q)\in B_\beta$. 故 $f^{n_0}(q)\in W_\beta^s(p)$, 因而 $q\in f^{-n_0}(W_\beta^s(p))$. 类似地可证 $W^u(p)=\bigcup\limits_{n\geq 0}f^n(W_\beta^u(p))$. 我们现在来定义映射 φ_s: $E^s\to M$, 其像为 $W^s(p)$. 若 $x\in E^s$, 则存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $A^{n_0}(x)\in U$, 此处 U 是前面考虑的 0 的邻域. 我们定义

$$\varphi_s(x)=f^{-n_0}h^{-1}A^{n_0}(x).$$

由于 h^{-1} 使 A 与 f 共轭, 故 φ_s 是有明确的定义的, 即与 n_0 的选取无关. 易证 φ_s 是单射拓扑浸入, 且 $\varphi_s(E^s)=W^s(p)$. 类似地, 我

们可构造一单射拓扑浸入 $\varphi_u: E^u \to M$，其像为 $W^u(p)$. □

注. (1) 若 $p \in M$ 是 f 的不动点，则对 f 而言 p 的稳定流形与对 f^{-1} 而言 p 的不稳定流形重合. 这个对偶性，使我们能将稳定流形的每一性质，翻译成不稳定流形的一个性质.

(2) 虽然局部稳定流形是一嵌入拓扑圆盘，但下面的例 2 说明，整体稳定流形可能不是 M 的嵌入子流形.

(3) 必须强调，Grobman-Hartman 定理仅给 $W^s(p)$ 提供拓扑子流形结构，如命题 6.1 所证. 然而下一定理不依赖 Grobman-Hartman 定理，它证明 $W^s(p)$ 是可微浸入子流形，与微分同胚属于同一可微类. 我们介绍命题 6.1，作为本节主要内容的诱导.

例 2. 设 $f: S^2 \to S^2$ 是向量场 X 的流在时间 1 导出的微分同胚，X 的轨道结构如下：北极 p_N 是北半球唯一的奇点；南极 p_S 是一鞍点，它的稳定与不稳定流形形成一个"8 字图"，包围另外两个奇点，见图 6. 在此例中，p_s 的稳定流形不是 S^2 的嵌入子流形.

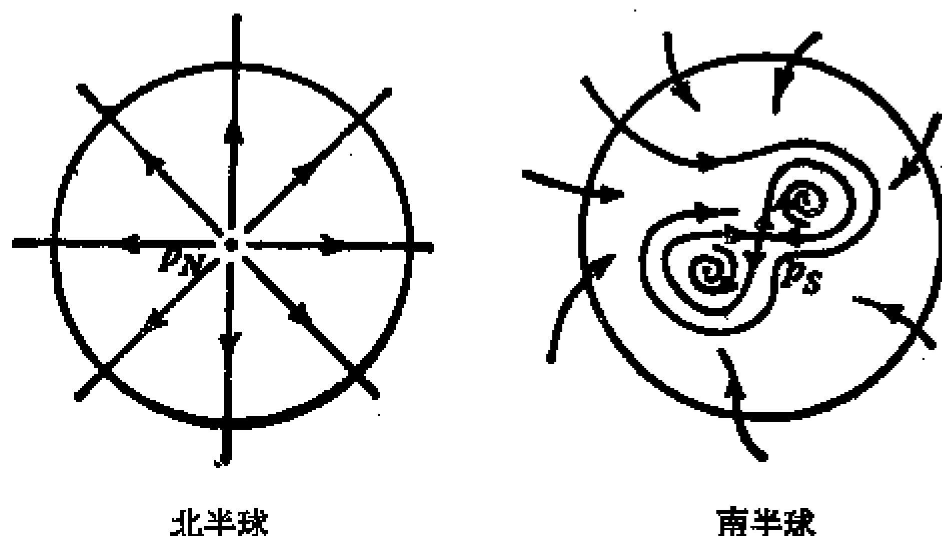
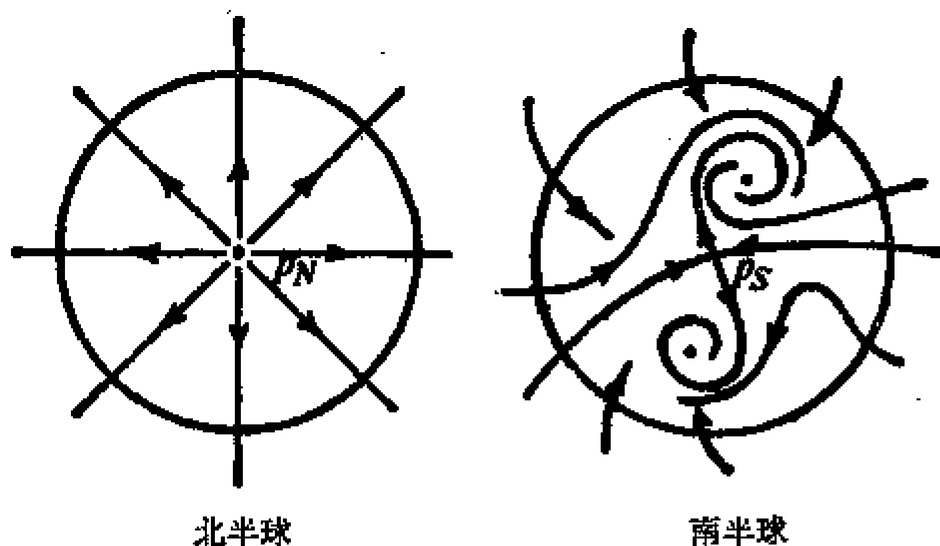


图 6

例 3. 设 $f = Y_1$，此处 Y 是 S^2 上向量场，其轨道构造由图 7 显示. 在此例中，$W^s(p_s)$ 与 $W^u(p_s)$ 都是 S^2 的嵌入子流形.

定义. 设 S 与 S' 是 M 的 C^r 子流形，且设 $\varepsilon > 0$. 我们说 S 和 S' 是 εC^r 接近，若存在一 C^r 微分同胚 $h: S \to S' \subset M$，使得在 C^r 拓扑中 $i'h$ 和 i 是 ε 接近. 此处 $i: S \to M$ 和 $i': S' \to M$ 表示包含映射.



北半球　　　　南半球

图 7

6.2 定理(稳定流形定理). 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$, 设 p 是 f 的一个双曲不动点,而 E^s 是 $A=Df_p$ 的稳定子空间. 则

(1) $W^s(p)$ 是 M 中单射浸入流形,且 $W^s(p)$ 在 p 点的切空间是 E^s;

(2) 设 $D\subset W^s(p)$ 是一嵌入圆盘, 包含 p 点. 考虑一邻域 $\mathcal{N}\subset \mathrm{Diff}^r(M)$, 使得每一 $g\in\mathcal{N}$ 有唯一的双曲不动点 p_g 包含在 p 的某邻域 U 中. 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 f 的一邻域 $\widetilde{\mathcal{N}}\subset\mathcal{N}$, 使得对每一 $g\in\widetilde{\mathcal{N}}$, 存在一圆盘 $D_g\subset W^s(p_g)$, εC^r-接近 D.

我们将应用在 Banach 空间的隐函数定理来阐述此定理的一个证明. 这个证明是由 M. Irwin 给出的[48]. 我们采用由 J. Franks 引入的一组符号来叙述.

我们将明证, 局部稳定流形 $W^s_\beta(p)$ 是一 C^r 映射的图象, 且 $W^s_\beta(p)$ 的点以 p 为其 ω 极限. 由于 $W^s=\bigcup\limits_{n\geq 0}f^{-n}W^s_\beta(p)$, 故整体稳定流形是 C^r 类的. 所以我们可以局限于讨论 f 是定义在 $\mathbb{R}^m$ 中 0 的一邻域 V 的微分同胚,而 0 是 f 的双曲不动点的情形.

设 $A=Df(0)$. 考虑 A-不变的分裂 $\mathbb{R}^m=E^s\oplus E^u$, 以及在 E^s, E^u 上的范数 $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_u$ 使得

$$\|A^s\|_s<a<1,\quad \|(A^u)^{-1}\|_u<a<1.$$

在 $\mathbb{R}^m$ 上我们采用范数

$$\|x_s\oplus x_u\|=\max\{\|x_s\|_s,\ \|x_u\|_u\}.$$

对于 $\beta>0$，记 B_β 为以 0 为中心、β 为半径的开球．且令

$$B_\beta^s = B_\beta \cap E^s, \quad B_\beta^u = B_\beta \cap E^u.$$

选取 β，使得在 B_β 中，可写成

$$f = A + \Phi, \ \Phi(0) = 0, \ \|D\Phi\| < \varepsilon.$$

对于满足 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(a^{-1}-1)$ 的某 ε 成立．我们也采用记号

$$f = (f^s, f^u), \ A = (A^s, A^u), \ \Phi = (\Phi^s, \Phi^u).$$

为了证明定理 6.2，我们需要下面的引理．

6.3 引理． 若 $z=(x_s, x_u)$ 和 $z'=(x'_s, x'_u)$ 对所有 $n\geqslant 0$ 满足 $f^n(z)\in B_\beta$ 和 $f^n(z')\in B_\beta$，则 $z=z'$[1]．

证明． 考虑 B_β 中两点 $y=(y_s, y_u)$ 和 $y'=(y'_s, y'_u)$，满足

$$\|y_s - y'_s\| \leqslant \|y_u - y'_u\|,$$

我们断言：

$$\|f^u(y) - f^u(y')\| \geqslant (a^{-1}-\varepsilon)\|y_u - y'_u\|,$$

$$\|f^s(y) - f^s(y')\| \leqslant \|f^u(y) - f^u(y')\|.$$

事实上 $f^u(y) - f^u(y') = A^u(y) - A^u(y') + \Phi(y) - \Phi(y')$．

由中值定理，有

$$\|f^u(y) - f^u(y')\| \geqslant a^{-1}\|y_u - y'_u\| - \varepsilon\|y - y'\|.$$

由于 $\|y - y'\| = \|y_u - y'_u\|$，

我们推出 $\|f^u(y) - f^u(y')\| \geqslant (a^{-1}-\varepsilon)\|y_u - y'_u\|$．

类似地 $\|f^s(y) - f^s(y')\| \leqslant a\|y_s - y'_s\| + \varepsilon\|y - y'\|$．

由于 $\|y - y'\| = \|y_u - y'_u\| \geqslant \|y_s - y'_s\|$，

得出 $\|f^s(y) - f^s(y')\| \leqslant (a+\varepsilon)\|y_u - y'_u\| \leqslant \|f^u(y) - f^u(y')\|$．

由这些不等式，我们推出

$$\|f(y) - f(y')\| \geqslant (a^{-1}-\varepsilon)\|y - y'\|.$$

现在考虑原来的点 z, z' 且对 $n>0$ 令 $y=f^n(z)$，$y'=f^n(z')$．由上面的讨论，我们有

$$\|f^n(z) - f^n(z')\| \geqslant (a^{-1}-\varepsilon)^n\|z - z'\|.$$

由于 $a^{-1}-\varepsilon>1$，故有结论 $z=z'$．反之，则 $f^n(z)$ 与 $f^n(z')$ 的距离将随 n 而趋于无穷，这与对所有 $n\geqslant 0$，$f^n(z)$ 与 $f^n(z')$ 都属于 B_β 这一

---

1) 引理 6.3 似应添加一条件：z 和 z' 还满足 $\|x_s - x'_s\| \leqslant \|x_u - x'_u\|$．——译者注

事实矛盾. □

定理 6.2 的证明. 我们要证明：其正轨道保持在 0 的一邻域的点的集合是一 C^r 子流形. 我们也要证明，此集合与其正轨道收敛到原点的点的集合重合. 首先，我们诱导这个证明. 设 K 是 $\mathbb{R}^m$ 中满足 $\gamma(n)\to 0$ 的序列 $\gamma(n)$ $(n\geqslant 0)$ 组成的空间，其范数为

$$\|\gamma\|=\sup_n\|\gamma(n)\|.$$

设 G 为 K 的子集，由

$$G=\{\gamma\in K;\ \gamma(n)\in B_\beta \text{ 对 } n\geqslant 0\}$$

定义. 假定对某 $z\in B_\beta$，有 $\gamma\in G$，使

$$\gamma(n)=f^n(z).$$

则

$$\begin{aligned}\gamma(n)&=A(A+\Phi)^{n-1}(z)+\Phi(\gamma(n-1))\\&=A^2(A+\Phi)^{n-2}(z)+A\Phi(\gamma(n-2))+\Phi(\gamma(n-1))\\&=A^n(z)+\sum_{i=0}^{n-1}A^{n-1-i}\Phi(\gamma(i)).\end{aligned}$$

$\gamma(n)$ 的第二分量有表达式

$$(A^u)^n\Big[z_u+\sum_{i=0}^{n-1}(A^u)^{-1-i}\Phi^u(\gamma(i))\Big].$$

由于 A^u 是一扩张，故 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(A^u)^{-1-i}\Phi^u(\gamma(i))$ 收敛到 $-z_u$.

这启发我们定义一映射 F: $B_\beta^s\times G\to K$ 如下：

$$F(x,\ \gamma)(n)=\gamma(n)-\Big((A^s)^n(x)+\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}\Phi^s(\gamma(i)),\\ -\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}\Phi^u(\gamma(i))\Big).$$

我们要证明 $F(x,\ \gamma)\in K$，然后证明对每一 x，存在 $\gamma\in G$ 使得 $F(x,\ \gamma)=0$.

选取 $b>0$，使得对 $z\in B_\beta$，$\|\Phi(z)\|<b$. 由于 $0<a<1$，$\sum\limits_0^\infty a^j$ 是有界的，且收敛到 $(1-a)^{-1}$. 首先注意 $\gamma(n)\to 0$，及因

$$\|(A^s)^n\|<a^n,\ (A^s)^n(x)\to 0.$$

又 $$\Big\|\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}\Phi^u(\gamma(i))\Big\|\leqslant(1-a)^{-1}\sup_{i\geqslant n}\|\Phi^u(\gamma(i))\|.$$

故任给 $\varepsilon>0$，选取 n 足够大，使得对于 $i\geqslant n$，$\|\Phi^u(\gamma(i))\|<(1-a)\varepsilon$. 于是 $F(x,\gamma)$ 的第二分量趋于 0. 考虑其第一分量，对于 $0\leqslant m\leqslant n$，我们有

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}\Phi^s(\gamma(i))\right\|$$
$$\leqslant(1-a)^{-1}a^{n-m}b+(1-a)^{-1}\sup_{i\geqslant m}\|\Phi^s(\gamma(i))\|.$$

给定 $\varepsilon>0$，取 m 足够大，使得第二项小于 $\varepsilon/2$. 然后能取 n 足够大，使第一项小于 $\varepsilon/2$. 因而 $F(x,\gamma)\in K$.

现在我们利用隐函数定理. 固定 $\gamma\in G$，映射 $x\to F(x,\gamma)$ 从 B_β^s 到 K 是仿射的和连续的. 特别地，它是 C^{r-1} 类的. 我们要证明，对于 $u\in K$，

$$D_2F(x,\gamma)(u)(n)=u(n)-\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}D\Phi^s(\gamma(i))(u(i)),$$
$$-\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}D\Phi^u(\gamma(i))(u(i))\Big).$$

为了简化表达式，下面我们将等式的右端记为 λ. 我们要证明：任给 $\delta>0$，对于小的 $\|u\|$，

$$\|F(x,\gamma+u)(n)-F(x,\gamma)(n)-\lambda\|\leqslant\delta\|u\|.$$

此式的左边小于或等于

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}[\Phi^s(\gamma(i)+u(i))-\Phi^s(\gamma(i))\right.$$
$$\left.-D\Phi^s(\gamma(i))(u(i))]\right\|$$
$$+\left\|\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}[\Phi^u(\gamma(i)+u(i))-\Phi^u(\gamma(i))\right.$$
$$\left.-D\Phi^u(\gamma(i))(u(i))]\right\|.$$

由于 $D\Phi$ 在 B_δ 的闭包上连续，它在 B_δ 上一致连续. 因而给定 $\delta'>0$ 时，存在 $\rho>0$ 使得对 $z\in B_\delta$，且 $\|u\|$ 足够小满足 $z+u\in B_\delta$ 及 $\|u\|<\rho$ 时，$\|D\Phi(z+u)-D\Phi(z)\|<\delta'$. 将中值定理应用到 $\Phi(z+u)-\Phi(z)$，我们得

$$\|\Phi(z+u)-\Phi(z)-D\Phi(z)u\|\leqslant\delta'\|u\|,$$

我们推断出上述表达式的每一项小于

$$(1-a)^{-1}\delta'\|u\|.$$

故取
$$2(1-a)^{-1}\delta'<\delta$$

就够了．这证明

$$\lambda=D_2F(x,\ \gamma)(u)(n).$$

容易直接验证 D_2F 连续．

因为 D_1F 和 D_2F 连续，故 F 是 C' 类的，并且我们可直接验证 $D_2F(0,\ 0)$ 是 K 上的恒等映射 I．由隐函数定理，在 E^s 中存在一球 B_r^s 和一映射

$$\varphi:\ B_r^s\to G,$$

使得 $\varphi(0)=0$，且对所有 $x\in B_r^s$，

$$F(x,\ \varphi(x))=0.$$

我们有
$$\varphi(x)(0)=\left(x,\ -\sum_{i=0}^{\infty}(A^u)^{-1-i}\Phi^u(\varphi(x)(i))\right).$$

然后定义
$$h:\ B_r^s\to E^u$$

为上式的第二个分量，故

$$\varphi(x)(0)=(x,\ h(x)).$$

由于 φ 是 C^1 的，且将 γ 变到 $\gamma(0)$ 的映射 $\theta:\ G\to\mathbb{R}^m$ 是连续线性的，故 h 是 C^1 类的．我们指出：

$$h=\pi_2\circ\theta\circ\varphi,$$

此处 $\pi_2:\ \mathbb{R}^m\to E^u$ 是自然投影，由于对所有 $n\geqslant0$，

$$F(x,\ \varphi(x))(n)=0,$$

我们有

$$\varphi(x)(n)=\Big(\ (A^s)^n(x)+\sum_{i=0}^{n-1}(A^s)^{n-1-i}\Phi(\varphi(x)(i))$$
$$-\sum_{i=n}^{\infty}(A^u)^{n-1-i}\Phi(\varphi(x)\ (i))\Big).$$

由此得出

$$\varphi(x)(n+1)=(A+\Phi)\varphi(x)(n)=f(\varphi(x)(n)).$$

由归纳法我们有

$$\varphi(x)(n)=f^n(x,\ h(x))$$

对所有 $n>0$ 成立. 这证明: 若 $z\in \mathrm{graph}(h)$[1], 则当 $n\to\infty$ 时, $f^n(z)$ 趋于 0. 另一方面, 若 z 和它的正轨道保持在 0 的一小邻域中, 则由引理 6.8, $z\in \mathrm{graph}(h)$. 故 $f(\mathrm{graph}(h))\subset \mathrm{graph}(h)$, 且 $\mathrm{graph}(h)$ 表示 f 在 0 的局部稳定流形, 为了证明局部稳定流形在 0 与 E^s 相切, 剩下还要证明 $Dh(0)=0$. 由于

$$F(x,\ \varphi(x))=0,$$

我们有 $$D_1F(x,\ \varphi(x))+D_2F(x,\ \varphi(x))D\varphi(x)=0.$$

因为 $$D_2F(0,\ 0)=I,$$

由此得出 $$D\varphi(0)=-D_1F(0,\ 0),$$

若 $v\in E^s$, 则

$$D\varphi(0)(v)=-D_1F(0,\ 0)(v)=-u,$$

此处 $$u(n)=(-(A^s)^n v,\ 0),\quad 对于\ n\geqslant 0,$$

由于 $h=\pi_2\circ\theta\circ\varphi$, 又因 π_2 与 θ 为线性的, 我们有

$$Dh(0)v=\pi_2((A^s)^0 v,\ 0)=0.$$

这就是我们要证明的.

上面我们证明了稳定流形是 C^1 类的. 事实上若 f 是 C^r 的, 那么它也是 C^r 的. 这只要证明上述 F 为 C^r 类的即得. 我们看出 D_1F 是 C^{r-1} 类的, 且可直接验证 D_2F 是 C^{r-1} 类的. 局部稳定流形连续依赖于扰动 Φ, 可用和上面相同的方法加以证明. 使 F 也依赖于有界 C^r 扰动

$$F=F(x,\ \gamma,\ \Phi)$$

就够了. 然后验证 D_3F 是 C^{r-1} 的, 因而 F 是 C^r 的. 剩下的证明和上面一样. 只需注意, $A+\Phi$ 的不动点会随 Φ(连续)变化. 但这对上面的证明影响不大; 利用一 C^r 微分同胚, 我们可以将不动点移回到原点. □

值得指出: 证明对某些映射也有效: A^s 可能有一些特征值为 0. 然而, 用这种方法我们只能证明稳定流形的存在. 我们将用另一种方法证明不稳定流形的存在, 这个方法叫图变换, 下面加以

---

1) graph 在中文中被译为图象, 但这里它已成为一专门的记号, 故不译, 有人也用 Gr 或 gr. ——译者注

说明。

另外，还需指出：上述证明在 Bauach 空间也成立，我们仅需添加一假设，即局部映射 f 及其各阶导数在 B_δ 中一致连续。

现在我们考虑向量场 $X\in\mathscr{X}(M)$，设 $p\in M$ 是 X 的双曲奇点，p 关于向量场 X 的稳定流形 $W^s(p, X)$，是 M 中那些其 ω 极限是 p 的点的集合。令 $f=X_1$ 是时间 $t=1$ 导出的微分同胚。我们已知，p 是 f 的双曲不动点。若 $W^s(p, f)$ 表示 p 关于 f 的稳定流形，则

$$W^s(p, f)=W^s(p, X).$$

事实上，若 $x\in W^s(p, X)$，即当 $t\to\infty$ 时，$X_t(x)\to p$，则当 $n\to\infty$，显然有

$$X_n(x)=f^n(x)\to p,$$

因而
$$W^s(p, X)\subset W^s(p, f).$$

另一方面，设 U 是 p 的任一邻域。由于 $X(p)=0$，故存在 p 的邻域 V 使得 $X_t(V)\subset U$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 成立。若 $x\in W^s(p, f)$，则存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对 $n\geqslant n_0$，$f^n(x)\in V$，因而对 $t\geqslant n_0$，有 $X_t(x)\in U$。这证明当 $t\to\infty$ 时，$X_t(x)\to p$。因此

$$W^s(p, f)\subset W^s(p, X).$$

我们也将介绍定理 6.2 的另一个更几何化的证明的大意，其证明在[39]和[77]中可见。我们略去第二个证明的细节，因为它的技巧非常复杂。然而，我们着重指出，这个证明适用于重要的推广，如在[40]中。

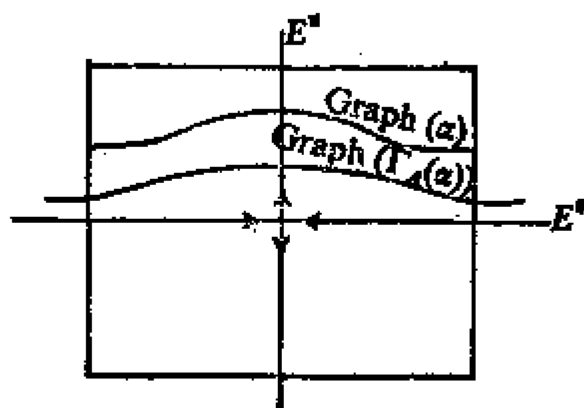


图 8

设 $\mathscr{F}\subset C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$ 是所有其 Lipschitz 常数最多为 1 的 C^r 映射的集合。则 $\mathscr{F}$ 是 $C^r(B_\beta^s, B_\beta^u)$ 的一闭子集，因而是一 Baire 空间。若 $\alpha\in\mathscr{F}$，则 α 的图象是 $\mathbb{R}^m$ 的一 C^r 子流形。因 A 压缩 E^s 中的向量而扩张 E^u 中的向量，故 $A^{-1}(\mathrm{graph}(\alpha))\cap B_\beta$ 是一个从 B_β^s 到 B_β^u 的 C^r 映射的

图象，我们记这个映射为 $\Gamma_A(\alpha)$. 事实上

$$\Gamma_A(\alpha)(x_s)=(A^s)^{-1}\alpha(A^s x_s).$$

由于 $\Gamma_A(\alpha)$ 也有不超过 1 的 Lipschitz 常数，我们定义了一个映射

$$\Gamma_A:\ \mathscr{F}\to\mathscr{F}$$

称为对应于 A 的**图变换**. 易见，若 $\alpha\in\mathscr{F}$，序列 $\{\Gamma_A^n(\alpha)\}$ 收敛到零映射，其图象是 A 的稳定流形. 由于 A 是 f 在点 0 的导数，因此可以期望，取 β 足够小时，我们可以定义对应于 f 的图变换

$$\Gamma_f:\ \mathscr{F}\to\mathscr{F}.$$

若 Γ_f 有一吸引不动点 $\alpha_f\in C^r(B_\beta^s,\ B_\beta^u)$，即 $\Gamma_f(\alpha_f)=\alpha_f$，且 $\Gamma_f^n(\alpha)\to\alpha_f$ 对任意 $\alpha\in\mathscr{F}$ 成立，则 $f(\mathrm{graph}(\alpha_f))=\mathrm{graph}(\alpha_f)$，且 $\mathrm{graph}(\alpha_f)$ 是 B_β 中所有关于 f 的正轨道保持在 B_β 中的点的集合. 故 $\mathrm{graph}(\alpha_f)=W_\beta^s(0)$. 换句话说，定理的证明能用下列步骤完成：

(1) Γ_f 是合理定义的，且有一吸引不动点 $\alpha_f\in C^r(B_\beta^s,\ B_\beta^u)$.

(2) 若 g 在 C^r 拓扑中邻近 f，则 Γ_g 是合理定义的，且有一吸引不动点，随 g 连续变化.

§7. λ 引理(倾角引理).局部稳定性的几何证明

在本节中我们讨论与动力系统的一些结果有关的并且阐明其中某些结果的一个局部事实[75]. 特别地，我们将给出 Grobman-Hartman 定理的另一个更几何化的证明. 我们也注意到：在 Banach 空间同样的结果(和证明)成立.

设 f 是 $\mathbb{R}^m$ 中 0 的一邻域 V 的 C^r 微分同胚，以 0 为双曲不动点. 考虑双曲同构 $A=Df(0)$，及不变的分裂 $\mathbb{R}^m=E^s\oplus E^u$. 在第 6 节我们证明：不动点 0 的局部稳定流形 $W_{loc}^s(0)$ 是一满足 $\varphi_s(0)=0$ 及 $D\varphi_s(0)=0$ 的 C^r 映射

$$\varphi_s:\ B_\beta^s\to E^u$$

的图象. 这里 $B_\beta^s(0)\subset B_\beta$ 表示以 0 为中心、以 β 为半径的球. 同样局部不稳定流形 $W_{loc}^u(0)$ 是一满足 $\varphi_u(0)=0$ 及 $D\varphi_u(0)=0$ 的

C^r 映射

$$\varphi_u: B^u_\beta \to E^s$$

的图象.

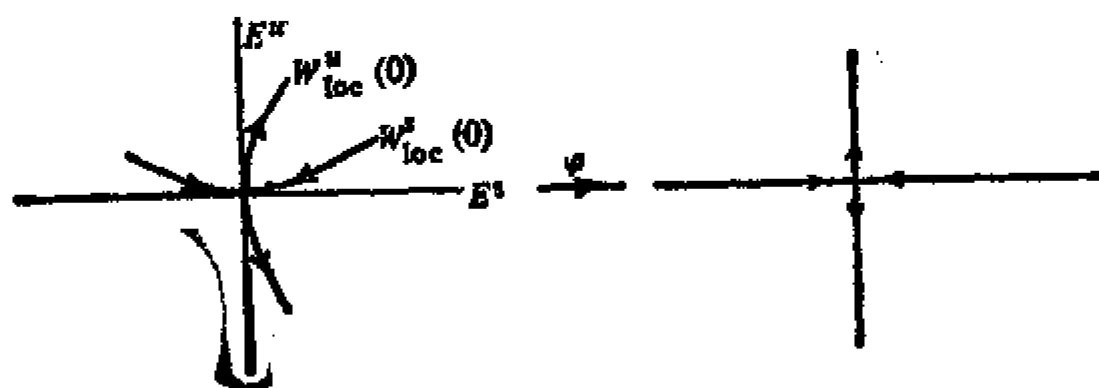


图 9

考虑映射

$$\varphi: B^s_\beta \oplus B^u_\beta \to E^s \oplus E^u, \ \varphi(x_s, x_u) = (x_s - \varphi_u(x_u), \ x_u - \varphi_s(x_s)).$$

显然 φ 是 C^r 类的且 $D\varphi(0)$ 是恒等映射. 因而 φ 限制在 $\mathbb{R}^m$ 中的 0 的某一邻域是一微分同胚. 考虑微分同胚

$$\tilde{f} = \varphi_* f = \varphi f \varphi^{-1}.$$

则 $\tilde{f}$ 是原点一邻域的微分同胚具有 $\tilde{f}(0) = 0$ 和 $D\tilde{f}(0) = A$. 并且 $\tilde{f}$ 的局部稳定流形是 E^s 中原点的一邻域, 而它的不稳定流形是 E^u 中原点的一邻域. 换句话说, 我们总可假定微分同胚的一双曲不动点的稳定(不稳定)流形是不动点在 f 的线性部份的稳定(不稳定)子空间的一邻域.

设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一范数, 满足 $\|A^s\| \leqslant a < 1$ 和 $\|(A^u)^{-1}\| \leqslant a < 1$, 此处 A^s 与 A^u 是 A 分别在 E^s 与 E^u 上的限制. 若 $f^s: B^s_\beta \to E^s$ 是 f 在 $W^s_\beta(0) \subset B^s_\beta \subset E^s$ 上的限制, 则 $Df^s(0) = A^s$. 由于 A^s 是压缩, 故对于足够小的 β, f^s 是压缩. 因此若 $B^s \subset B^s_\beta$ 是以原点为中心的开球, 则 $f(\partial B^s) \subset B^s$, 此处 $\partial B^s = \overline{B^s} - B^s$ 是 B^s 的边界. 圆环

$$G^s(0) = \overline{B^s - f(B^s)}$$

称为关于 0 的稳定流形的**基本域**. 显然

$$\partial G^s(0) = \partial B^s \cup f(\partial B^s).$$

若 $x \in W^s(0) - \{0\}$, 则 x 的轨道至少有一点且至多有二点在

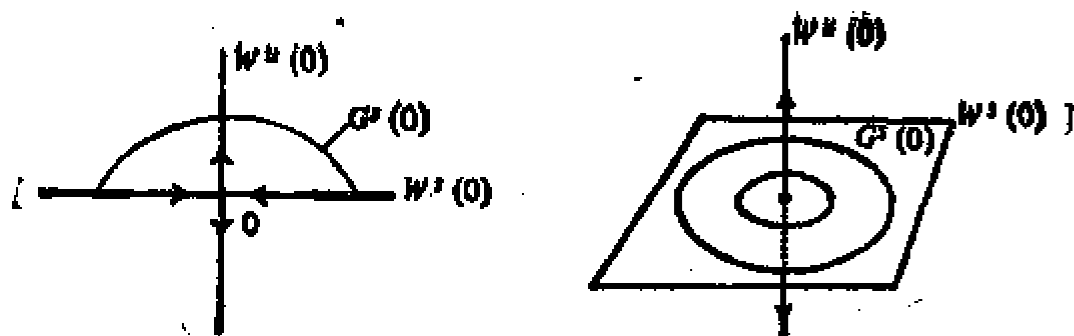


图 10

基本域 $G^s(0)$ 中，即

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(G^s(0)) = W^s(0) - \{0\}$$

且若 $x\in \operatorname{int} G^s(0)$，则对所有 $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$，$f^n(x)\notin G^s(0)$.

$G^s(0)$ 的任意与 $W^u_{loc}(0)$ 不相交的邻域 $N^s(0)$，称为关于 0 的稳定流形的基本邻域．类似地，我们可定义关于 0 的不稳定流形的基本域 $G^u(0)$ 和基本邻域 $N^u(0)$.

设 $B^s\subset E^s$ 是包含在 $W^s_{loc}(0)$ 中的一球，$B^u\subset E^u$ 是包含在 $W^u_{loc}(0)$ 中的一球，且 $V=B^s\times B^u$. 考虑一点 $q\in W^s_{loc}(0)$ 以及一个维数为 $u=\dim E^u$ 且在 q 点与 $W^s_{loc}(0)$ 匀断相交的圆盘 D^u.

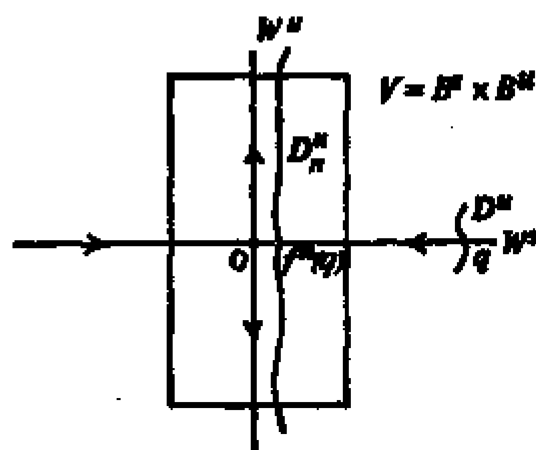


图 11

7.1 引理（λ 引理）. 设 $V=B^s\times B^u$，设 $q\in W^s(0)-\{0\}$ 且设 D^u 如上所述．设 D^u_n 是 $f^n(D^u)\cap V$ 的包含 $f^n(q)$ 的连通分支．任给 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得若 $n>n_0$，则 D^u_n 是 εC^1 接近 B^u.

证明．f 在 0 的邻域 V 的表示式由

$$f(x_s, x_u)=(A^s x_s+\varphi_s(x_s, x_u),\ A^u x_u+\varphi_u(x_s, x_u))$$

给出，此处　$(Df)_0=(A^s, A^u)$，$x_s\in B^s$，$x_u\in B^u$.

$$\|A^s\|\leqslant a<1,\ \|(A^u)^{-1}\|\leqslant a<1,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_u}\right|_{B^u}=\left.\frac{\partial\varphi_u}{\partial x_s}\right|_{B^s}=0.$$

由于 $\partial\varphi_i/\partial x_j(0, 0)=0$ 对 $i, j=s, u$ 成立．由这些偏导数的连续

性推出：存在 k 使

$$a_1=a+k<1,\ 0<k<1,\ b=(a^{-1}-k)>1,\ k<(b-1)^2/4,$$

以及存在 $V'\subset V$ 使得

$$k\geqslant\max_{V'}\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\|,\ i,\ j=s,\ u.$$

我们可假定 $q\in V'$ 且 $B^u\subset V'$. 设 v_0 是 $(TD^u)_q$ 中任一单位向量. 在乘积空间 $V=B^s\times B^u$ 中我们可写成 $v_0=(v_0^s,\ v_0^u)$. 设 λ_0 是 v_0 的斜率, $\lambda_0=\|v_0^s\|/\|v_0^u\|$, 由于 D^u 在 q 点与 B^s 匀断相交, 故 $\|v_0^u\|\neq 0$. 考虑

$$\begin{aligned}
q_1&=f(q), & v_1&=Df_q(v_0)\\
q_2&=f^2(q), & v_2&=Df_{q_1}(v_1)\\
&\vdots & &\vdots\\
q_n&=f^n(q), & v_n&=Df_{q_{n-1}}(v_{n-1}).
\end{aligned}$$

对于 $q\in\partial B^u$,

$$Df_q(v_0)=\begin{pmatrix} A^s+\partial\varphi_s/\partial x_s(q) & \partial\varphi_s/\partial x_u(q)\\ 0 & A^u+\partial\varphi_u/\partial x_u(q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0^s\\ v_0^u\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A^sv_0^s+\partial\varphi_s/\partial x_s(q)\,v_0^s+\partial\varphi_s/\partial x_u(q)\,v_0^u\\ A^uv_0^u+\partial\varphi_u/\partial x_u(q)\,v_0^u\end{pmatrix}.$$

因而 $$\lambda_1=\frac{\|v_1^s\|}{\|v_1^u\|}=\frac{\|A^sv_0^s+\partial\varphi_s/\partial x_s(q)\,v_0^s+\partial\varphi_s/\partial x_u(q)\,v_0^u\|}{\|A^uv_0^u+\partial\varphi_u/\partial x_u(q)\,v_0^u\|}.$$

分子有上界

$$\begin{aligned}
&\|A^sv_0^s\|+\|\partial\varphi_s/\partial x_s(q)\,v_0^s\|+\|\partial\varphi_s/\partial x_u(q)\,v_0^u\|\\
&\quad\leqslant a\|v_0^s\|+k\|v_0^s\|+k\|v_0^u\|.
\end{aligned}$$

分母有下界

$$\|A^uv_0^u\|-\|\partial\varphi_u/\partial x_u(q)\,v_0^u\|\geqslant a^{-1}\|v_0^u\|-k\|v_0^u\|.$$

故 $$\lambda_1\leqslant\frac{a\lambda_0+k\lambda_0+k}{a^{-1}-k}\leqslant\frac{\lambda_0+k}{b}=\frac{\lambda_0}{b}+\frac{k}{b},$$

$$\lambda_2=\frac{\|v_2^s\|}{\|v_2^u\|}\leqslant\frac{\lambda_1+k}{b}\leqslant\frac{\lambda_0}{b^2}+k\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{b^i},$$

$$\lambda_n=\frac{\|v_n^s\|}{\|v_n^u\|}\leqslant\frac{\lambda_0}{b^n}+k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b^i}\leqslant\frac{\lambda_0}{b^n}+\frac{k}{b-1}.$$

由于 $n\to\infty$ 时 $\lambda_0/b^n\to 0$，且 $k/b-1<(b-1)/4$，故存在 $n_0\in \mathbf{Z}^+$，使得对任意 $n>n_0$，有 $\lambda_n\leqslant(b-1)/4$. 设 $0<k_1<\min(\varepsilon, k)$. 由于 $\partial\varphi_s/\partial x_u|_{B^u}=0$，且 B^u 紧致，故存在 $\delta<\varepsilon$ 使得对于 $V_1=\delta B^s\times B^u$，我们有

$$\max_{V_1}\left\|\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_u}\right\|\leqslant k_1.$$

此处 δB^s 表示其半径为 B^s 的半径乘以 δ 的球.

由于 v_0 可取得使 λ_0 是 $(TD^u)_q$ 中单位向量的最大可能斜率，故存在 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，$(TD_n^u)_{q_n}$ 中所有非零向量的斜率 $\lambda_n\leqslant(b-1)/4$，且 $q_{n_0}\in V_1$. 因此由 $D_{n_0}^u$ 的切平面的连续性，存在嵌入 $D_{n_0}^u$ 内以 q_{n_0} 为中心的圆盘 $\widetilde{D}^u$，使得对 $p\in\widetilde{D}^u$，$(T\widetilde{D}^u)_p$ 中的任意单位向量的斜率 λ 满足 $\lambda\leqslant(b-1)/2$.

对于 $p\in\widetilde{D}^u$，设 $v\in(T\widetilde{D}^u)_p$. 在分解 $v=(v^s, v^u)$ 中，v 有斜率

$$\lambda_{n_0}=\|v^s\|/\|v^u\|.$$

我们来计算 v 的迭代的斜率. 我们有

$$Df_p(v)=\begin{pmatrix} A^sv^s+\partial\varphi_s/\partial x_s(p)v^s+\partial\varphi_s/\partial x_u(p)v^u \\ \partial\varphi_u/\partial x_s(p)v^s+A^uv^u+\partial\varphi_u/\partial x_u(p)v^u\end{pmatrix}.$$

故
$$\lambda_{n_0+1}=\frac{\|A^sv^s+\partial\varphi_s/\partial x_s(p)v^s+\partial\varphi_s/\partial x_u(p)v^u\|}{\|\partial\varphi_u/\partial x_s(p)v^s+A^uv^u+\partial\varphi_u/\partial x_u(p)v^u\|},$$

其分子小于 $a\|v^s\|+k\|v^s\|+k_1\|v^u\|$，而其分母则大于

$$\begin{aligned}&\|A^uv^u\|-\|\partial\varphi_u/\partial x_u(p)v^u\|-\|\partial\varphi_u/\partial x_s(p)v^s\|\\ &\geqslant a^{-1}\|v^u\|-k\|v^u\|-k\|v^s\|.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda_{n_0+1}&\leqslant\frac{\lambda_{n_0}+k_1}{a^{-1}-k-k\lambda_{n_0}}\leqslant\frac{\lambda_{n_0}+k_1}{b-k\lambda_{n_0}}\\ &\leqslant\frac{\lambda_{n_0}+k_1}{b-\frac{1}{2}k(b-1)}\leqslant\frac{\lambda_{n_0}+k_1}{b-\frac{1}{2}(b-1)}=\frac{\lambda_{n_0}+k_1}{\frac{1}{2}(b+1)}.\end{aligned}$$

设 $b_1=\frac{1}{2}(b+1)>1$. 则

$$\lambda_{n+n_0}\leqslant\frac{\lambda_{n_0}}{b_1^n}+\frac{k_1}{b_1-1}.$$

故存在 $\tilde{n}$ 使得对 $n\geqslant\tilde{n}$

$$\lambda_{n+n_0}\leqslant\varepsilon\left(1+\frac{1}{b_1-1}\right).$$

由于我们可取 v 使得 λ_{n_0} 是 $\tilde{D}^u$ 的单位切向量中最大可能的斜率，故对 $n\geqslant\tilde{n}$，任何切于 $f^n(\tilde{D}^u)\cap V_1$ 的非 0 向量的斜率小于 $\varepsilon[1+(b_1-1)^{-1}]$. 因而，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\bar{n}$ 使得对 $n\geqslant\bar{n}$，$f^n(\tilde{D}^u)\cap V_1$ 的所有非 0 向量的斜率小于 ε.

比较 $f^n(\tilde{D}^u)\cap V_1$ 的一切向量和它在 Df 下的像

$$(v_n^s,\ v_n^u)\to Df(v_n^s,\ v_n^u)=(v_{n+1}^s,\ v_{n+1}^u)$$

的范数:

$$\frac{\sqrt{\|v_{n+1}^s\|^2+\|v_{n+1}^u\|^2}}{\sqrt{\|v_n^s\|^2+\|v_n^u\|^2}}=\frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|}\sqrt{\frac{1+\lambda_{n+1}^2}{1+\lambda_n^2}}.$$

从 v_{n+1}^u 和 v_n^u 的表示式推出

$$\frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|}\geqslant a^{-1}-k-k\lambda_n.$$

由于斜率 λ_{n+1} 和 λ_n 是任意小，显然 $f^n(\tilde{D}^u)\cap V_1$ 的非零切向量的迭代的范数按一个趋于 $b=a^{-1}-k>1$ 的比率增加. 故 $f^n(\tilde{D}^u)\cap V_1$ 的直径递增，连同它的切空间有一致小的斜率这个事实，推得存在 $\bar{n}$，使得当 $n>\bar{n}$ 时，$f^n(\tilde{D}^u)\cap V_1$ 经由典型投影到 B^u 上，是 C^1 接近 B^u. λ 引理证毕. □

注. (1) λ 引理可叙述为一族圆盘匀断相交于 $W^s(0)$，只要这一族圆盘在 C^1 拓扑中连续. 因而，设

$$F: G^s(0)\to C^1(B^u,\ M)$$

是一连续映射，它使基本域 $G^s(0)$ 中每一点 q 对应一与 B^s 匀断相交的圆盘 $D_q^u=F(q)B^u$. 设 $U=B^s\times B^u$ 如上所述. 则给定 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得对任一 $q\subset G^s(0)$，及 $n\geqslant n_0$，$f^n(D_q^u)\cap U$ 是一 εC^1 接近于 B^u 的圆盘.

(2) 若 F 是 C^r 圆盘的连续族，$r\geqslant1$，亦即我们有一连续映射

$$F:\ G^s(0)\to C^r(B^u,\ M),$$

则这些圆盘可被证明是 C^r 接近. 虽然这在大部分应用中是不必要的.

(3) 下面的事实是 λ 引理的直接结果. 设 D^s 是一小的 s 维圆盘. 匀断相交于 $W^u(0)$, 则存在 $n_0>0$ 和一点列 $z_n\in D^u$, $n\geqslant n_0$, 使得 $f^n(z_n)\in D^s$.

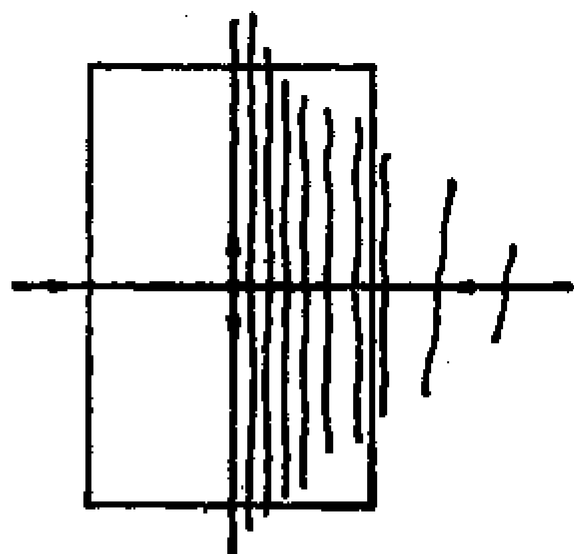


图 12

推论 1. 设 $p_1, p_2, p_3\in M$ 都是 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的双曲不动点. 若 $W^u(p_1)$ 与 $W^s(p_2)$ 有一匀断相交点, 且 $W^u(p_2)$ 与 $W^s(p_3)$ 有一匀断相交点, 则 $W^u(p_1)$ 与 $W^s(p_3)$ 有一匀断相交点.

证明. 设 q 是 $W^u(p_2)$ 与 $W^s(p_3)$ 匀断相交的一点. 考虑圆盘 $D\subset W^u(p_2)$ 包含 p_2 与 q. 由于 D 与 $W^s(p_3)$ 有一匀断相交点, 因而存在 $\varepsilon>0$, 使得若 $\tilde{D}$ 是 εC^1 接近 D 的一圆盘, 则 $\tilde{D}$ 与 $W^s(p_3)$ 也有匀断相交点. 现设 q_2 是 $W^u(p_1)$ 与 $W^s(p_2)$ 的一匀断相交点, 且 $D^u\subset W^u(p_1)$ 是一包含 q_2 且与 $W^u(p_1)$ 同维的圆盘. 由 λ 引理, 存在整数 n_0 使得 $f^{n_0}(D^u)$ 包含一 εC^1 接近 D 的圆盘 $\tilde{D}$, 因而存在一点 $\tilde{q}\in\tilde{D}\cap W^s(p_3)$. 由于 $W^u(p_1)$ 是不变的, 我们有 $f^{n_0}(D^u)\subset W^u(p_1)$. 因此 $\tilde{q}$ 是 $W^u(p_1)$ 与 $W^s(p_3)$ 的一个匀断相交点. □

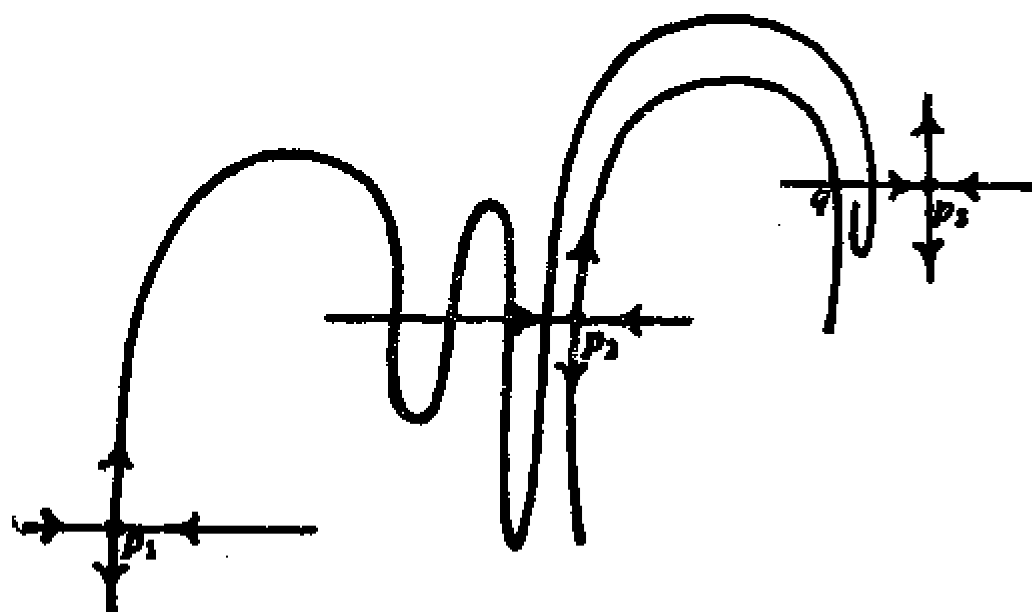


图 13

推论 2. 设 $p\in M$ 是 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的双曲不动点，且设 $N^s(p)$ 是 $W^s(p)$ 的一基本邻域. 则对 p 的某一邻域 U,

$$\bigcup_{n>0} f^n(N^s(p))\supset U-W^s_{loc}(p).$$

证明. 首先注意到基本域 $G^s(p)\subset N^s(p)$ 经由 f 的迭代覆盖 $W^s(p)-\{p\}$; 亦即

$$\bigcup_{n\in \mathbb{Z}} f^n(G^s(p))=W^s(p)-\{p\}.$$

另外由 λ 引理, p 的某一邻域 U 中每一个不在 $W^s_{loc}(p)$ 的点属于与 $G^s(p)$ 匀断相交且包含于 $N^s(p)$ 的一截面的某次迭代. □

现在我们来证明关于向量场的 λ 引理. 设 $p\in M$ 是 $X\in \mathscr{X}^r(M)$ 的一双曲奇点、设 $W^s_{loc}(p)$ 与 $W^u_{loc}(p)$ 是 p 点的局部稳定与不稳定流形. 设 B^s 是一嵌入于 $W^s_{loc}(p)$ 的圆盘, 使得 ∂B^s 在 $W^s(p)$ 中与场 X 匀断相交. 球面 $\mathscr{S}^s(p)=\partial B^s$ 叫做关于 $W^s(p)$ 的一个**基本域**. 易见, 若 $x\in W^s(p)\to\{p\}$, x 的轨道与 $\mathscr{S}^s(p)$ 仅交一个点. 类似地可定义关于 $W^u(p)$ 的基本域.

设 D^u 是包含一点 $q\in W^s_{loc}(p)$ 且与 $W^s_{loc}(p)$ 匀断相交的一圆盘, 其维数 $\dim D^u=\dim W^u_{loc}(p)$. 设 K 是紧致集

$$K=\{X_t(q);\ t\in[0,1]\}.$$

对每一点 $x_t(q)\in K$, 考虑圆盘 $D^u(X_t(q))=X_t(D^u)$, 由于 X_t 是微分同胚且 $W^s_{loc}(p)$ 对于 X_t 是不变的, 故圆盘包含点 $X_t(q)$, 且与 $W^s_{loc}(p)$ 匀断相交. 设 $f=X_1$ 是在时间 1 导出的微分同胚, 则 p 是 f 的双曲不动点, 且 p 对于微分同胚 f 的稳定与不稳定流形与 p 对于向量场 X 的稳定与不稳定流形重合. 设 B^s 是嵌入 $W^s_{loc}(p)$ 且包含 p 的一圆盘, B^u 是嵌入 $W^u_{loc}(p)$ 且包含 p 的一圆盘. 且 $V=B^s\times B^u$ 是 p 的一邻域. 由关于微分同胚的 λ 引理, 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得若 $n>n_0$, $D^u_n(x)$ 是 εC^1 接近于 B^u, 此处 $D^u_n(x)$ 是 $f^n(D^u(x))\cap V$ 的包含 $f^n(x)$ 的连通分支, $x\in K$. 这证明了下述引理.

7.2 引理. 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $t_0>0$ 使得若 $t>t_0$ 且 D^u_t 是 $X_t(D^u)\cap V$ 的包含 $X_t(q)$ 的连通分支, 则 D^u_t 是 εC^1 接近 B^u. □

现在我们介绍 Grobman-Hartman 定理的另一个更几何的证明. 我们要用 λ 引理和稳定流形定理. 我们已经指出，它们的证明是与 Grobman-Hartman 定理无关的. 我们介绍的证明是关于流的. 但类似的讨论对微分同胚也有效.

7.8 引理. 设 $p\in M$ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的一双曲奇点. 存在 p 的一邻域 U 及一连续映射 $\pi_s: U\to B_s$, 此处 $B_s=U\cap W^s_{loc}(p)$ 是包含 p 的一圆盘，具有下列性质：

(1) $\pi_s^{-1}(p)=B_u=U\cap W^u_{loc}(p)$ 是一包含 p 的圆盘.

(2) 对每一 $x\in B_s$, $\pi_s^{-1}(x)$ 是 M 的一 C^r 子流形，在点 x 与 $W^s_{loc}(p)$ 匀断相交.

(3) π_s 是 C^r 的，除了可能在 B^u 的点之外.

(4) 由 π_s 定义的纤维化对于 X 的流是不变的，亦即若 $t\geqslant 0$, 则 $X_t(\pi_s^{-1}(x))\supset\pi_s^{-1}(X_t(x))$.

证明. 利用一个局部卡，我们可假定 X 是 $\mathbb{R}^m=E^s\oplus E^u$ 的原点的一邻域 V 上的向量场，以 0 为双曲奇点. 我们还可假定 $W^s_{loc}(0)$ 是 E^s 中包含 0 的开子集，而 $W^u_{loc}(0)$ 是 E^u 中包含 0 的开子集. 设 $\mathscr{G}^s(0)$ 是 $W^s(0)$ 的基本域，$\mathscr{G}^s(0)$ 是包含在 E^s 中的一球面，它与 E^s 上的向量场 X 匀断相交. 设 $B^u\subset E^u$ 是包含 0 的圆盘. 若我们取 B^u 足够小，则柱面 $\mathscr{G}^s(0)\times B^u$ 与向量场匀断相交. 在 $\mathscr{G}^s(0)\times B^u$ 我们有

$$\pi_s:\ \mathscr{G}^s(0)\times B^u\to W^s_{loc}(0)$$

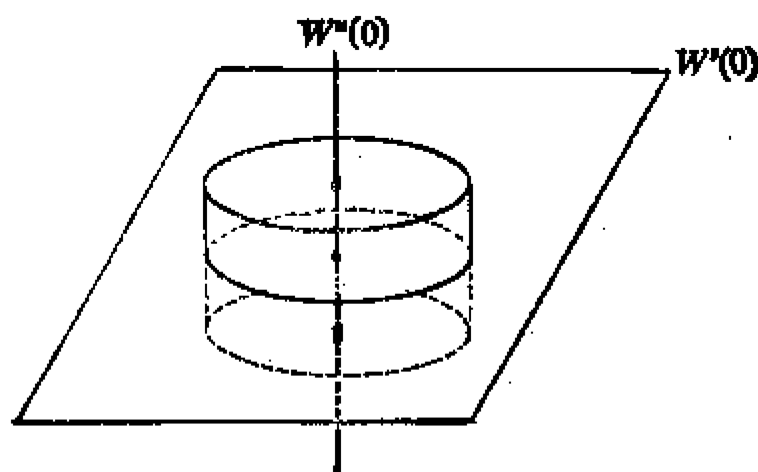


图 14

它是到第一个因子的射影. 过 $x\in\mathscr{G}^s(0)$ 的纤维 $\pi_s^{-1}(x)$ 是与 $W^s_{loc}(0)$ 匀断相交的圆盘. 由 λ 引理的推论 2,

$$\bigcup_{t>0}X_t(\mathscr{G}^s\times B^u)\supset U-E^u,$$

此处 U 是 p 的一邻域, 若 $x\in U\cap E^u$, 我们定义 $\pi_s(x)=p$. 若 $x\in U-E^u$, 则存在 $t>0$ 使得 $X_{-t}(x)\in\mathscr{G}^s\times B^u$. 此时我们定义

$$\pi_s(x)=X_t\pi_0X_{-t}(x)$$

显然 π_s 在 $U-E^u$ 内是 C^r 的. 而 π_s 在 E^u 的点的连续性则由 λ 引理可得. □

利用上面构造的纤维, 我们可证明双曲奇点的局部稳定性. 事实上, 设 $p\in M$ 是 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的一双曲奇点. 设 N 是 X 的一邻域使得任一 $Y\in N$ 有一奇点 p_Y 靠近 p 且有相同的指数. 定义同胚

$$h^s:\ W^s_{loc}(p)\to W^s_{loc}(p_Y),$$

$$h^u:\ W^u_{loc}(p)\to W^u_{loc}(p_Y),$$

共轭 X 与 Y 的流, 首先在基本域上定义它们, 然后利用 X 与 Y 的流, 像在命题 2.14 那样扩充它们到 $W^s_{loc}(p)$ 与 $W^u_{loc}(p)$. 像在引理 7.3 中那样考虑纤维化

$$\pi_s^X:\ U_p\to W^s_{loc}(p),$$

$$\pi_u^X:\ U_p\to W^u_{loc}(p),$$

$$\pi_s^Y:\ V_{p_Y}\to W^s_{loc}(p_Y),$$

$$\pi_u^Y:\ V_{p_Y}\to W^u_{loc}(p_Y).$$

若 $q\in U_p$, 定义 $h(q)=\tilde{q}$, 此处 $\tilde{q}$ 满足

$$\pi_s^Y(\tilde{q})=h^s(\pi_s^Xq),$$

及

$$\pi_u^Y(\tilde{q})=h^u(\pi_u^Xq).$$

显然 h 是同胚且使 X 与 Y 的流共轭. 我们指出, 上面考虑的纤维化定义连续坐标系, 在其中流表为乘积, 从而同胚 h 是 h^s 与 h^u 的乘积.

利用 λ 引理对微分同胚的 Grobman-Hartman 定理作的一个证明可参看[75]. 纤维的构造是类似的, 但更为复杂.

练　习

1．证明线性向量场是双曲的当且仅当每一轨道的ω极限或者是原点或者是空的。

2．证明在$\mathbf{R}^4$上存在一线性向量场L，它有一轨道γ，其ω极限包含γ，但γ既不是奇点，也不是闭轨道。

3．我们称线性同构$A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$**嵌入一流**，若存在一向量场$X$产生的流$X_t$满足$A = X_1$．用其典型形式表征嵌入流的双曲线性同构。

4．设$f: M \to \mathbf{R}$是C^r类的，$r \geqslant 2$．且设$X = \text{grad} f$．证明$p \in M$是X的一双曲奇点当且仅当$df(p) = 0$且$d^2 f(p)$是一非退化的双线性形式。

5．设$X = \text{grad} f$，此处$f: M \to \mathbf{R}$是C^{r+1}类的．证明若$p \in M$是X的一奇点，则dX_p的特征值是实的。

6．给出一个向量场$X \in \mathscr{X}^r(S^2)$的例子，使$X \in \mathscr{G}_1$而$X_{t=1} \notin G_1$．亦即$X_{t=1}$有非双曲的不动点。

7．设$X = \text{grad} f$，此处$f: M \to \mathbf{R}$是C^{r+1}类的，$r \geqslant 1$．证明$X \in \mathscr{G}_1$当且仅当$X_{t=1} \in G_1$．

8．一C^r函数$f: M \to \mathbf{R}$，$r \geqslant 2$称为**Morse函数**，若$\text{grad} f \in \mathscr{G}_1$，亦即若$\text{grad} f$的奇点都是双曲的．证明所有Morse函数的集合在$C^r(M)$中开且稠。

提示：设$\varphi: \mathbf{R}^n \to R$是$C^\infty$类的，证明0是由$\Phi(x, A) = d\varphi(x) + A$定义的映射$\Phi: \mathbf{R}^n \times L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \to L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$的一正则值。

9．设X与Y是$\mathbf{R}^m$上的C^1向量场．假定0是X和Y的一吸引双曲奇点．证明存在原点一邻域的一同胚h，它使微分同胚$X_{t=1}$与$Y_{t=1}$共轭，但不把X的轨道变到Y的轨道。

10．设$p \in M$是微分同胚f的一双曲不动点．设$\{p_n\}$是f的周期点序列，具有性质$p_n \neq p$且$p_n \to p$．证明存在f的周期点的序列收敛到p的不稳定流形上异于p的一点。

11．证明若$f \in \text{Diff}^r(M)$，$r \geqslant 1$，是结构稳定的，则f的所有不动点都是双曲的。

12．设$p \in M$是$f \in \text{Diff}^r(M)$的一双曲周期点．证明给定$n \in \mathbb{N}$，存在p的一邻域使得f在$V - \{p\}$中的任一周期点具有大于n的周期。

13．设0是向量场X与$Y \in \mathscr{X}^r(\mathbf{R}^n)$的一个双曲奇点．证明若存在$C^1$微分同胚$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，将$X$的轨道变为$Y$的轨道，则$L = DX(0)$的特征值与$\bar{L} = DY(0)$的特征值成比例。

提示：在上述假定下，存在一函数$\lambda: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$使得$Df(x) \cdot X(x) =$

$\lambda(x)\tilde{Y}(f(x))$. 证明对于每一 $v\neq 0$, 存在 $\tilde{\lambda}(v)=\lim\limits_{t\to 0}\lambda(tv)$ 以及 $Df(0)\cdot\tilde{L}v=\tilde{\lambda}(v)\tilde{L}Df(0)\cdot v$.

14. 设 f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 微分同胚, 有 $f(0)=0$. 设 E^u 与 E^0 是 f 的不变子空间, 有 $\mathbf{R}^n=E^0\oplus E^u$. 记 f^u: $E^u\to E^u$ 和 f^0: $E^0\to E^0$ 分别为 f 在 E^u 与 E^0 上的限制. 假定 $df^u(0)$ 的特征值有绝对值 >1, 而 $df^0(0)$ 的特征值有绝对值 $\leqslant 1$. 设 $D^u\subset E^u$ 是包含 0 的一圆盘, 且 D 是一与 E^0 匀断相交的圆盘, 包含一点 $q\in E^0$ 使得当 $n\to\infty$ 时, $f^n(q)\to 0$. 证明在 $\mathbf{R}^n$ 中存在 0 的一邻域 V, 使得对所有 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 满足下面的性质: 若 $n\geqslant n_0$, 则 $f^n(D)$ 包含一 εC^1 接近 $V\cap D^u$ 的圆盘.

15. 设 f: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是一 C^3 微分同胚, $f(x, y)=(f_1(x, y), f_2(x, y))$, 有下述性质:

(1) 对所有 $y\in\mathbf{R}$, $f_1(0, y)=0$;

(2) 对所有 $x\in\mathbf{R}$, $f_2(x, 0)=0$;

(3) $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0)>1$;

(4) 若 $\alpha(x)=f_1(x, 0)$, 则 $\alpha'(0)=1$, $\alpha''(0)=0$ 且 $\alpha'''(0)<0$.

证明存在 $a>0$ 及 $(0, 0)$ 的一邻域 V, 使得任意的 $\varepsilon>0$ 和一过点 $(0, y)\in V$ 与轴 $x=0$ 匀断相交的截线, 存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得若 $n>n_0$, 则 $f^{-n}(D)$ 包含一圆盘 εC^1 接近区间 $\{(x, 0);\ -a\leqslant x\leqslant a\}$.

16. 证明上题中的微分同胚 f 局部共轭于微分同胚

$$g(x, y)=(x-x^3, 2y).$$

17. 设 f: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是一 C^2 微分同胚, $f(x, y)=(f_1(x, y), f_2(x, y))$, 具有下述性质:

(1) 对所有 $y\in\mathbf{R}$, $f_1(0, y)=0$;

(2) 对所有 $x\in\mathbf{R}$, $f_2(x, 0)=0$;

(3) $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0)>1$;

(4) 若 $\alpha(x)=f_1(x, 0)$, 则 $\alpha'(0)=1$, $\alpha''(0)\neq 0$.

证明 f 局部共轭于微分同胚

$$g(x, y)=(x+x^2, 2y).$$

第三章 Kupka-Smale 定理

设 M 是 n 维紧致流形，设 $\mathscr{X}^r(M)$ 是 M 上的所有 C^r 向量场的空间，具有 C^r 模，其中 $r\geqslant 1$. 在第二章中，我们已证明了其一切奇点是双曲的所有向量场所组成的集合 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{X}^r(M)$ 是在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中开与稠的. 这是通有性质的一个例子，通俗地说，通有性质就是被几乎一切向量场所满足的性质. 在这一章中我们将分析在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的其它通有性质. 此处讨论的结果的原始证明可在[44]，[82]以及[107]中找到.

首先，我们引进闭轨的双曲性的概念. 与奇点情况相同，双曲闭轨 γ 在初始向量场的小扰动下仍保持下来，此外，这一向量场的轨道结构是很简单的，而且，小扰动下是稳定的. 特别地，那些以 γ 为 ω 极限(α 极限)的点的集合是微分流形，称之为 γ 的稳定(不稳定)流形. 在本书中将要阐明的意义下，当向量场有一点点改变时，这些流形的紧致部分亦仅有一点点改变.

让我们考虑两个双曲奇点 σ_1 与 σ_2. 若 σ_1 的稳定流形与 σ_2 的不稳定流形相交，于是 σ_1 与 σ_2 将由从 σ_2 开始到 σ_1 终止的几条轨道联系起来. 若相交是匀断的，那末向量场的小扰动将有用同样方式联系起来的双曲奇点. 以后我们将要看到，类似的概念和性质对闭轨也是正确的.

我们要证明，所有这些性质对于 $\mathscr{X}^r(M)$ 的一个剩余子集中的向量场成立. 在这一章的结尾我们还将对 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 建立类似的性质.

§1. Poincaré 映射

在前一章中，我们曾描述了双曲奇点邻域中的向量场轨道的

拓扑性质,现在我们将对闭轨作类似的研究. 与奇点情况相同,为了得到闭轨邻域中的轨道结构的简单描述,我们需要把我们的讨论限制在向量场空间的一子集上.

设 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的闭轨,考虑过点 $x_0\in\gamma$ 与场 X 匀断相交的截痕 Σ.

设过 x_0 的轨道经过时间 τ 绕回与 Σ 相交,这里 τ 是 γ 的周期. 借助于向量场 X 的流的连续性,当 x 充分邻近 x_0 时,过 $x\in\Sigma$ 的轨道亦经过接近 τ 的时间绕回与 Σ 相交. 于是,若 $V\subset\Sigma$ 是 x_0 的充分小邻域,我们能定义映射 $P: V\to\Sigma$,它把每一点 $x\in V$ 对应到 $P(x)$,其中 $P(x)$ 是过 x 的轨道绕回与 Σ 相交的第一个交点. 这个映射称为相伴于轨道 γ(和截痕 Σ)的 Poincaré 映射. 对这个映射的认识使我们能给出 γ 邻域中的轨道的描述. 例如,若 $x\in V$ 是 P 的不动点,那末 x 的轨道是闭的,且它的周期近似等于 γ 的周期,只要 x 邻近于 x_0. 同样地,若 x 是 P 的周期为 k 的周期点,即 $P(x)\in V$, $P^2(x)\in V$, $\cdots$, $P^k(x)=x$,那末通过 x 的轨道是周期的,且它的周期近似等于 $k\tau$.

若对一切 $k>0$, $P^k(x)$ 有定义,过 x 的正向轨道将包含在 γ 的邻域中,且若加上条件:当 $k\to\infty$ 时,有 $P^k(x)\to x_0$,那末过 x 的轨道的 ω 极限是 γ. 我们还可应用 P 的逆来确定以 γ 为 α 极限的轨道,其中 P 的逆是相伴于向量场 $-X$ 的 Poincaré 映射.

由于场 X 和 $-X$ 的流的连续性,因而 P 是 Σ 中 x_0 的一邻域到 Σ 内的同胚. 应用管道流定理得到的流的可微性,以后我们将证明 P 实际上是与向量场具有同样光滑程度的局部微分同胚. 于是我们将可能应用 P 在 x_0 的导数描述在 γ 的邻域中轨道的结构. 为此,我们将需要某些预备性的结果.

关于 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的管道流是一对 (F, f),这里 F 是 M 中的开集,而 f 是 F 到方体

$$
\begin{aligned}
I^m &= I\times I^{m-1}\\
&=\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-1}, |x|<1, |y_i|<1, i=1, \cdots, m-1\}
\end{aligned}
$$

上的 C^r 微分同胚,它把 X 在 F 中的轨道变为直线 $I\times\{y\}\subset I\times$

I^{m-1}. 若 f_*X 表示由 f 和 X 在 I^m 中所诱导的向量场，即

$$f_*X(x, y)=Df_{f^{-1}(x,y)}\cdot X.(f^{-1}(x, y)).$$

那末 f_*X 平行于常向量场 $(x, y)\to(1, 0)$.

开集 F 称为关于向量场 X 的流匣. 在前一章中我们已经看到，若 $p\in M$ 是 X 的正则点，那末存在包含 p 的流匣.

图 1

1.1 命题（长管流）. 设 $\gamma\subset M$ 是 X 的非闭轨道的紧弧，那末存在 X 的管道流 (F, f)，使得 $F\supset\gamma$.

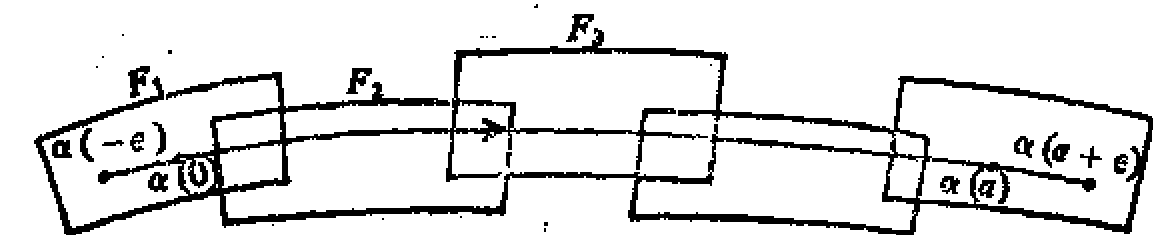


图 2

证明. 设 α: $[-\varepsilon, a+\varepsilon]\to M$ 是 X 的积分曲线，使得 $\alpha([0, a])=\gamma$，且当 $t\neq t'$ 时，有 $\alpha(t)\neq\alpha(t')$. 考虑紧集 $\bar{\gamma}=\alpha([-\varepsilon, a+\varepsilon])$，因为 $\bar{\gamma}$ 上的点是正则的，所以由管道流定理，存在一组流匣覆盖 $\bar{\gamma}$. 设 δ 是这覆盖的 Lebesgue 数，我们用直径小于 $\delta/2$ 的流匣组成 $\tilde{\gamma}$ 的有限覆盖 $\{F_1, \cdots, F_k\}$，按照这个构造，若 $F_i\cap F_j\neq\emptyset$，那末 $F_i\cup F_j$ 被包含在 X 的某个流匣中，利用这个性质我们重新安排 F_i，必要时可在大小上缩小它们，使得每一 F_i 仅与 F_{i-1} 和 F_{i+1} 相交.

设 $-\varepsilon=t_1<t_2<\cdots<t_k=a+\varepsilon$，满足 $p_i=\alpha(t_i)\in F_i\cap\tilde{\gamma}$，我们记

$$I_d^{m-1}=\{(0, y)\in I\times I^{m-1};\ |y_j|<d,\ j=1, \cdots, m-1\}.$$

设 (F_i, f_i) 是对应于上面流匣的管道流，显然 $\Sigma_1=f_1^{-1}(I_d^{m-1})$ 是与 X 匀断相交的截痕，这是因为 f_1 是局部微分同胚，且 $p_1\in\Sigma_1$. 若

$\Sigma_i = X_{t_i - t_1}(\Sigma_1)$，则 Σ_i 是包含 p_i 且与 X 匀断相交的截痕．如果 d 充分小，则有 $\Sigma_i \subset F_i$．

对于每一 $p \in \tilde{\gamma}$，我们取 $t \in [0, a+2\varepsilon]$ 使得 $p = X_t(p_1)$．考虑截痕 $\Sigma_p = X_t(\Sigma_1)$，利用管道流定理，若 $p \neq q$，就有

$$\Sigma_p \cap \Sigma_q = \varnothing.$$

并且 $F \bigcup\limits_{p \in \tilde{\gamma}} \Sigma_p$ 是 γ 的邻域．

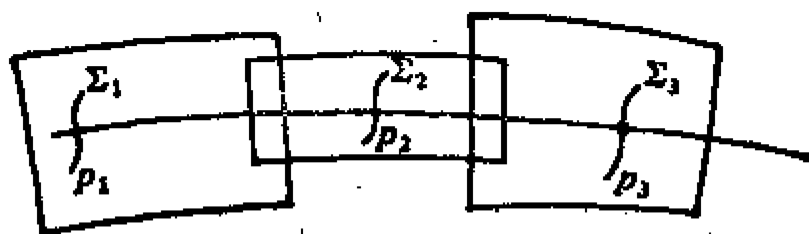


图 3

在这邻域中我们有 C^r 纤维化，其中在点 p 上的纤维是 Σ_p，即投影 $\pi_1: F \to \tilde{\gamma}$，把每点 $z \in F$ 对应到点 p，使得 $z \in \Sigma_p$．π_1 是 C^r 映射．我们还有另一个定义在 F 上的 C^r 投影 $\pi_2: F \to \Sigma_1$，它把每点 $z \in F$ 对应到过 z 的轨道与 Σ_1 的交点．更确切地说，若 $z \in \Sigma_p$ 以及 $p \in X_t(p_1)$，那末 $\pi_2(z) = X_{-t}(z)$．考虑两个微分同胚 $g_1: \tilde{\gamma} \to [-1, 1]$ 以及 $g_2: \Sigma_1 \to I^{m-1}$．于是我们定义 $f: F \to I \times I^{m-1}$，其中 $f(z) = (g_1\pi_1(z), g_2\pi_2(z))$．显然 (F, f) 是包含 γ 的管道流．□

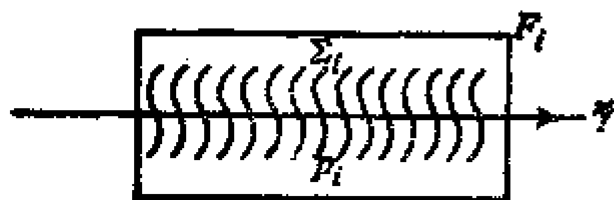


图 4

注．上面得到的微分同胚，将 X 在 F 中的轨道映到常向量场 C 的轨道，其中 $C: I \times I^{m-1} \to \mathbb{R}^m$，$C(x, y) = (1, 0)$．一般说来，$f$ 不保持参数 t，即 $f_* X$ 不等于向量场 C，然而我们能找到 γ 的邻域 $\tilde{F} \subset F$ 以及微分同胚 $\tilde{f}: \tilde{F} \to (-b, b) \times I^{m-1}$，这里 $b > 0$，使得 $\tilde{f}_* X$ 是常向量场．事实上，取 $p \in \gamma$ 以及 $b > 0$ 使得

$$\gamma \subset \bigcup_{t \in (-b, b)} X_t(p) \subset F.$$

设 $\Sigma_p \subset F$ 是过 p 点与 X 匀断相交的截痕，选取 Σ_p 充分小使

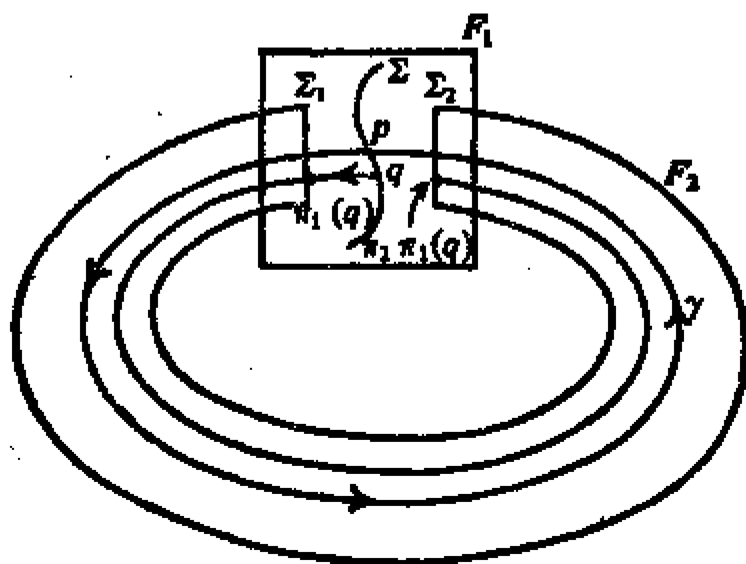
$$\tilde{F} = \bigcup_{t \in (-b, b)} X_t(\Sigma_p)$$

包含在 $\tilde{F}$ 中．若 $z\in\tilde{F}$ 且 $X_{-t}(z)\in\Sigma_p$，那末令

$$\tilde{f}(t)=(t,\ hX_t(z)),$$

这里 $h:\Sigma_p\to I^{m-1}$ 是微分同胚．易证 $\tilde{f}$ 是 C^r 微分同胚且 $\tilde{f}_*X$ 是常向量场．

1.2 命题．设 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的闭轨，Σ 是过 $p\in\gamma$ 与 X 匀断相交的截痕，若 $P_\Sigma: U\subset\Sigma\to\Sigma$ 是 Poincaré 映射，那末 P_Σ 是从 p 在 Σ 中的邻域 V 映到 Σ_p 的一开集上的 C^r 微分同胚．



证明．设$(F_1,\ f_1)$是包含 p 的管道流以及$(F_2,\ f_2)$是使 $\gamma\subset F_1\cup F_2$ 的长管流，如图 5 所示．

设 Σ_1 和 Σ_2 是 F_2 的与 X 匀断相交的边界分支，即 $\Sigma_1=f_2^{-1}(\{-1\}\times I^{m-1})$ 以及 $\Sigma_2=f_2^{-1}(\{1\}\times I^{m-1})$．记 $\pi_1: V\subset\Sigma\to\Sigma_1$，$\pi_2: \Sigma_1\to\Sigma_2$ 以及 $\pi_3: \Sigma_2\to\Sigma$ 分别是沿着 X 的轨道的投影，这里 V 是 Σ 中的 p 的小邻域，$P_\Sigma=\pi_3\circ\pi_2\circ\pi_1$．由管道流定理，易见 π_1，π_2，与 π_3 是 C^r 映射．于是 P_Σ 是 C^r 的．因 P 有 C^r 的逆，是对应于向量场 $-X$ 的 Poincaré 映射，由此可得 P_Σ 是从 V 映到 Σ 中开集上的 C^r 微分同胚．证毕． □

设 Σ_1 和 Σ_2 分别是过闭轨 γ 上的点 p_1 和 p_2 且与 X 匀断相交的截痕，如图 6 所示．

设 $h: \Sigma_1\to\Sigma_2$ 是一映射，把每一点 $q\in\Sigma_1$ 映到过 q 的轨道与

Σ_2 的第一个交点．由管道流定理，h 是 C^r 微分同胚．若 P_{Σ_1} 和 P_{Σ_2} 分别是关于截痕 Σ_1 和 Σ_2 的 Poincaré 映射，则我们有 $P_{\Sigma_2}=h\circ P_{\Sigma_1}\circ h^{-1}$，于是 $DP_{\Sigma_2}(p_2)=Dh(p_1)\circ DP_{\Sigma_1}(p_1)\circ Dh^{-1}(p_2)$，因而 $DP_{\Sigma_2}(p_2)$ 与 $DP_{\Sigma_1}(p_1)$ 的特征值相同．这就证明了下面的定义仅依赖于向量场而不依赖于截痕 Σ。

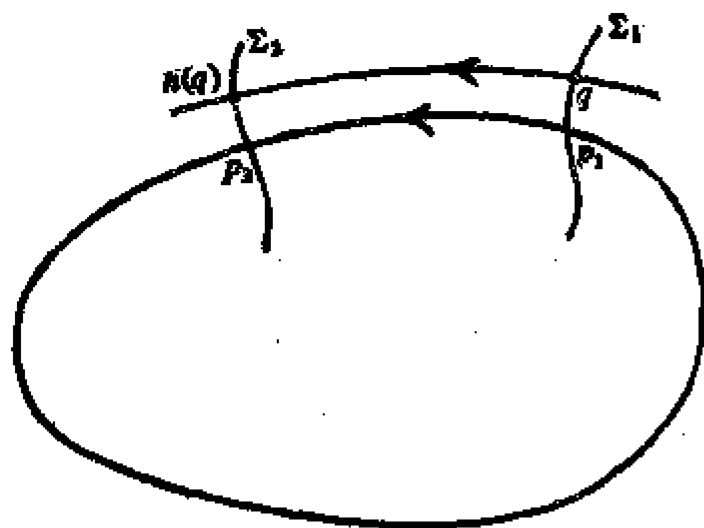


图 6

定义．设 $p\in\gamma$，此处 γ 是 X 的闭轨．设 Σ 是过 p 点与 X 匀断相交的截痕．我们说 γ 是 X 的双曲闭轨，若 p 是 Poincaré 映射 P: $V\subset\Sigma\to\Sigma$ 的双曲不动点．

注．因为向量场的流连续依赖于向量场，所以 Poincaré 映射也连续依赖于向量场，更准确地说，设 P_X: $V\subset\Sigma\to\Sigma$ 是 X 的 Poincaré 映射，$\mathscr{V}$ 是 X 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的邻域，使得对一切 $Y\in\mathscr{V}$, Σ 仍与 Y 匀断相交且 Y 过 V 的每点的轨道仍回来与 Σ 相交，则使每个 $Y\in\mathscr{V}$ 映到它的 Poincaré 映射 P_Y 的映射 $\mathscr{V}\to C^r(V,\Sigma)$ 是连续的．

由此可得，若 γ 是向量场 X 的双曲闭轨，那末存在 X 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{V}$，使得每一 $Y\in\mathscr{V}$ 有邻近于 γ 的双曲闭轨 γ_Y，这是因为，对于微分同胚的双曲不动点类似的性质是成立的，这一点在上一章已被证明．

目前，我们将要证明，若 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨，那末 X 在 γ 上是局部稳定的，即对于每一属于 X 的邻域 $\mathscr{V}$ 的向量场 Y，存在同胚 h: $V\to V'$，这里 V 是 γ 的邻域，h 把 X 的轨道映到 Y 的轨道．我们已经指出，我们不能要求同胚 h 使流 X_t 与 Y_t 共轭，因为这样将推出闭轨 $\gamma_Y\subset V'$ 有与 γ 相同的周期，但显然存在任意邻近 X 的向量场 Y 使闭轨 γ_Y 的周期与 γ 的不

同，这只要取 $Y=(1+n^{-1})X$，(n 充分大)即可.

设 Σ 是过点 $p\in\gamma$ 与向量场 X 匀断相交的截痕. 我们说 Σ 是不变的截痕，只要存在 p 的邻域 $U\subset\Sigma$，使得 $X_\omega(U)\subset\Sigma$，其中 ω 是 γ 的周期. 下面的引理证明可以适当地重新参数化向量场 X，使得给定的匀断相交的截痕是不变的. 虽然这一结论直观上是显然的，但它的证明是很有技巧的.

1.3 引理. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 且 γ 是 X 的周期为 ω 的双曲闭轨，设 Σ 是过 $p\in\gamma$ 且与 X 匀断相交的截痕，则存在连续映射 $\mu:\mathscr{V}\to\mathscr{X}^r(M)$，其中 $\mathscr{V}$ 是 X 的邻域，使得:

(a) $\mu(Y)=\rho_Y\cdot Y$，其中 $\rho_Y: M\to\mathbb{R}$ 是正的可微函数，在 γ 的某点邻域之外取值为 1.

(b) 存在 p 的邻域 $U\subset\Sigma$，使得 $Y^*_\omega(U)\subset\Sigma$，其中 $Y^*=\mu(Y)$，即对一切 $Y\in\mathscr{V}$，Σ 是 $Y^*=\mu(Y)$ 的不变截痕.

证明. 设 $\Sigma'=X_{-(\omega-t_0)}(\Sigma)$，其中 $0<t_0<\omega$. 我们有 $X_{t_0}(p)=p'\in\Sigma'$，考虑 C^r 映射 $\alpha:\Sigma\to\mathbb{R}$，它把每一 $y\in\Sigma$ 映到使得 $X_{\alpha(y)}(y)\in\Sigma'$ 的最小正时间 $\alpha(y)$. 我们指出，若对在 Σ 上的 p 的一邻域中的所有 y，有 $\alpha(y)=t_0$，那末 Σ 是不变的.

设 $U\subset\tilde{U}\subset\Sigma$ 是 p 的邻域，满足 $\overline{U}\subset\tilde{U}$，利用在 $\overline{U}$ 上取值 1 以及在 $\tilde{U}$ 之外取值零的冲击函数我们定义 C^r 映射 $\beta:\Sigma\to\mathbb{R}$，它在 U 上等于 α，在 $\tilde{U}$ 之外取常值 t_0，利用相同的冲击函数，我们对 X 邻域中的每一向量场 Y 定义 C^r 函数 $\beta_Y:\Sigma\to\mathbb{R}$，它在 U 上与函数 α_Y 相合，在 $\tilde{U}$ 之外等于 t_0. 于是 $\alpha_Y:\Sigma\to\mathbb{R}$ 是把每一 $y\in\Sigma$ 映

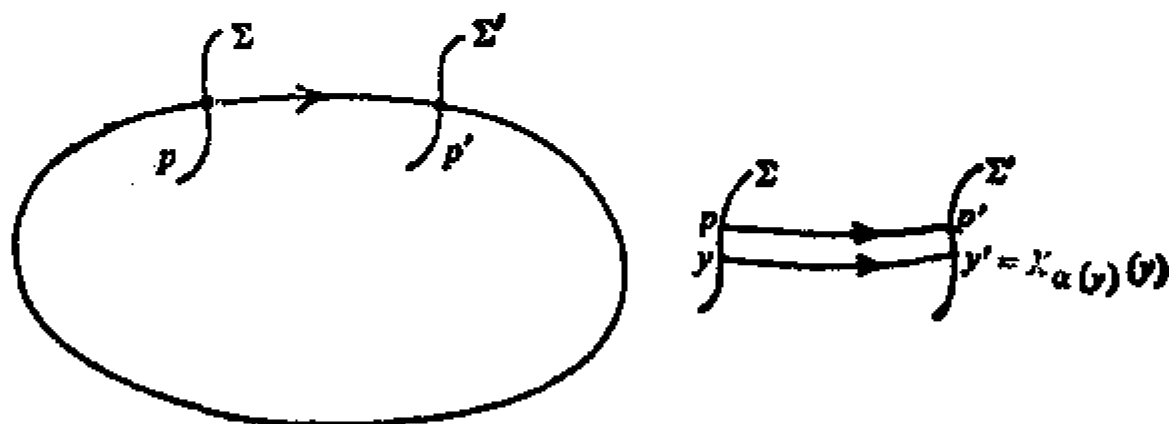


图 7

到使 $Y_{\alpha_Y(y)}\in\Sigma'_Y$ 的最小正时间 $\alpha_Y(y)$ 的函数，此处

$$\Sigma'_Y=Y_{-(\omega-t_0)}(\Sigma).$$

其次，我们来构造我们所要求的重新参数化，设 $G:\mathscr{V}\times\Sigma\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是满足如下条件的 C^r 映射：对每一 $Y\in\mathscr{V}$ 以及每一 $y\in\Sigma$，$G_{Y,y}(t)=G(Y,y,t)$ 是 t 的 $2r+3$ 次多项式，其系数是

$$G_{Y,y}(0)=0,\qquad G_{Y,y}(t_0)=\beta_Y(y);$$

$$\frac{dG_{Y,y}}{dt}(0)=1,\qquad \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t_0)=1;$$

$$\frac{d^kG_{Y,y}}{dt^k}(0)=0,\qquad \frac{d^kG_{Y,y}}{dt^k}(t_0)=0,$$

$$k=2,\cdots,r+1.$$

我们令 $\quad G_{Y,y}(t)=t+a_1t^{r+2}+\cdots+a_{r+2}t^{2r+3},$

其中 $\qquad a_j=\dfrac{\beta_Y(y)A_{1j}-t_0A_{1j}}{\det A},\quad j=1,\cdots,r+2.$

$$A=\begin{bmatrix} t_0^{r+2} & t_0^{r+3} & \cdots & t_0^{2r+3}\\ (r+2)t_0^{r+1} & (r+3)t_0^{r+2} & \cdots & (2r+3)t_0^{2r+2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (r+2)!\,t_0 & \dfrac{(r+3)!}{2!}t_0^2 & \cdots & \dfrac{(2r+3)!}{(r+2)!}t_0^{r+2}\end{bmatrix}$$

而 A_{1j} 是 A 中元素 $a_{1j}=t_0^{r+j+1}$ 的余子式。

由此得到

$$H_Y(y,t)=\frac{dG_{Y,y}}{dt}(t)$$

满足下列条件：

(a) $H_Y(y,0)=H_Y(y,t_0)=1$，当 $y\in\Sigma$ 时；

(b) $H_Y(y,t)=1$，当 $y\notin\widetilde{U}$ 时；

(c) $D^kH_Y(y,0)=D^kH_Y(y,t_0)=0$，对一切 $y\in\Sigma$ 以及 $k=1,\cdots,r$。

条件(c)容易从前面的等式得到。

于是 $H|\Sigma\times[0,t_0]$ 扩张成一 C^r 映射 $H:\Sigma\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，在 $\Sigma\times[0,t_0]$ 之外有 $H=1$。

对于小的 $\mathscr{V}$ 与 $\bar{U}$，映射 $G_{Y,y}:[0, t_0]\to[0, \beta_Y(y)]$ 是微分同胚. 这是因为对于 $y\notin\bar{U}$，$G_{Y,y}$ 是恒同；由 $\varphi_Y(y, t)=Y_{t^*}(y)$ 所定义的映射 $\varphi_Y:\Sigma\times[0,t_0]\to M$ 亦是 C^r 微分同胚，其中 $t^*=G_{Y,y}(t)$. 设 W 是 $\varphi_Y(\Sigma\times[0, t_0])\subset M$，定义 $\rho_Y: M\to\mathbb{R}$ 如下：在 W 之外等于 1，在 W 上它是如下映射的复合

$$q\xrightarrow{\varphi_Y^{-1}}(y,\ t)\xrightarrow{\partial G_{Y,y}}\frac{dG_{Y,y}}{dt}(t)=H_Y(y,\ t).$$

由上面构造，ρ_Y 是 C^r 的. 考虑向量场 $Y^*=\rho_Y\cdot Y$，我们断言对任 $y\in\Sigma$，有 $Y^*_{t_0}(y)\in\Sigma'_Y$. 事实上，设 $y\in U$ 以及设 $\psi:[0, \beta_Y(y)]\to M$ 是 Y 过 y 的积分曲线，于是 $\psi(t)=Y_t(y)$ 以及 $\psi(\beta_Y(y))\in\Sigma'_Y$，现设 $\psi^*:[0, t_0]\to M$ 是由 $\psi^*=\psi\circ G_{Y,y}$，定义的. 我们验证 ψ^* 是 Y^* 过 y 的积分曲线，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d\psi^*}{dt}(t)&=\frac{d\psi}{dt}(G_{Y,y}(t))\cdot\frac{dG_{Y,y}}{dt}(t)\\&=\frac{dG_{Y,y}}{dt}(t)\cdot Y(\psi\cdot G_{Y,y}(t))\\&=\rho_Y(\psi^*(t))\cdot Y(\psi^*(t))\\&=Y^*(\psi^*(t)).\end{aligned}$$

因而 $\qquad Y^*_{t_0}(y)=\psi^*(t_0)=\psi(\beta_Y(y))\in\Sigma'_Y.$

借助于定义 $\mu(Y)=Y^*$，定理得证. □

注. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，$p_0\in M$ 以及设 Σ 是包含 p_0 与 X 匀断相交的截痕，设 $\Sigma'=X_{t_1}(\Sigma)$ 和 $p_1=X_{t_1}(p_0)$，由引理的证明知道，我们能重新参数化 X 附近的一切向量场使得它们在时间 t_1 把截痕 Σ 映到截痕 Σ'. 对于 $0<t<t_1$，这种重新参数化可集中在点 $p=X_t(p_0)$ 邻域内.

1.4 命题. 若 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨，则 X 在 γ 上是局部稳定的.

证明. 设 ω 是 γ 的周期，Σ 是过点 $p\in\gamma$ 且与 X 匀断相交的截痕，则 p 是 Poincaré 映射 P_X 的双曲不动点. 因 Y 邻近于 X 时，Poincaré 映射 P_Y 也邻近于 P_X，所以由双曲不动点的局部稳定性，存在 X 的邻域 $\mathscr{V}$ 以及 p 的邻域 $U\subset\Sigma$，具有如下性质：对

每 $Y\in\mathscr{V}$，我们能找到从 U 到 Σ 中 p 的一邻域的同胚 h_Y，它使 P_X 与 P_Y 共轭，即 $h_Y\circ P_X=P_Y\circ h_Y$. 我们来扩充 h_Y 到 γ 的邻域. 设 $\mu:\mathscr{V}\to\mathscr{X}^r(M)$ 是引理 1.3 中得到的映射. 设 V 是 γ 的邻域，它使得若 $y\in V$，存在 $0\leqslant t\leqslant\omega$ 有 $X_t^*(y)\in U$，其中 $X^*=\mu(X)$. 于是我们定义 $h_Y(y)=Y_{-t}^*h_YX_t^*(y)$. 易见，若 V 充分小，h_Y 的定义有意义，它是同胚且使流 X_t^* 与 Y_t^* 共轭，因 X^*，Y^* 分别与 X，Y 轨道相同，故我们推得 h_Y 把 X 的轨道变成 Y 的轨道. □

若 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨，我们定义 γ 的稳定与不稳定流形如下

$$W^s(\gamma)=\{y\in M;\ \omega(y)=\gamma\},$$
$$W^u(\gamma)=\{y\in M;\ \alpha(y)=\gamma\}.$$

存在 γ 的邻域 V 使得若对一切 $t>0$，$X_t(q)\in V$，那末 $q\in W^s(\gamma)$. 这可由 γ 的 Poincaré 映射的类似性质得到. 考虑集合

$$W_V^s(\gamma)=\{y\in V;\ 对一切\ t\geqslant0,\ X_t(y)\in V\},$$
$$W_V^u(\gamma)=\{y\in V,\ 对一切\ t\leqslant0,\ X_t(y)\in V\},$$

我们有 $W^s(\gamma)=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}X_{-n}W_V^s(\gamma)$ 以及 $W^u(\gamma)=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}X_nW_V^u(\gamma)$.

□

1.5 命题 设 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨，若 V 是 γ 的小邻域，那末 $W_V^s(\gamma)$ 与 $W_V^u(\gamma)$ 是 M 的 C^r 子流形，$W_V^s(\gamma)$ 与 $W_V^u(\gamma)$ 匀断相交且 $W_V^s(\gamma)\cap W_V^u(\gamma)=\gamma$.

证明. 设 Σ 是过 $p\in\gamma$ 且与 X 匀断相交的截痕，若 U 是 Σ 中 p 的小邻域，我们分别用 $W_U^s(p)$ 与 $W_U^u(p)$ 表示 Poincaré 映射 P_X 的稳定流形与不稳定流形. 因 p 是 P_X 的双曲不动点，易见 $W_U^s(p)$ 与 $W_U^u(p)$ 是 C^r 子流形，它们在 Σ 中互相匀断相交且

$$W_U^s(p)\cap W_U^u(p)=\{p\},$$

因此，若 ω 是 γ 的周期，那末

$$\bigcup_{t\in(0,2\omega)}X_t(W_U^s(p))\ 与\ \bigcup_{t\in(0,2\omega)}X_{-t}(W_U^u(p))$$

是沿着 γ 彼此匀断相交的 C^r 的子流形，若 V 是 γ 的小邻域，于是 $W_V^s(\gamma)$ 与 $W_V^u(\gamma)$ 分别是在

$$\bigcup_{t\in(0,2\omega)}(W^s_U(p))\text{ 与 }\bigcup_{t\in(0,2\omega)}X_{-t}(W^u_U(p))$$

中的γ的开邻域．命题得证． □

推论．$W^s(\gamma)$与$W^u(\gamma)$是M的C^r的浸入子流形． □

我们把下面的陈述留给读者去证明．设γ是向量场$X\in\mathscr{X}^r(M)$的双曲闭轨；证明这里存在X的邻域$\mathscr{V}$，对每一$Y\in\mathscr{V}$，存在γ_Y的邻域$W_Y\subset W^s(\gamma_Y)$，使得映射$Y\to W_Y$是连续的，即对给定的$\varepsilon>0$以及$Y_0\in\mathscr{V}$，存在$\delta>0$，使得若$\|Y-Y_0\|<\delta$，那末W_Y是εC^r-邻近于W_{Y_0}．

§2．闭轨为双曲的向量场的通有性

在前一章我们曾证明由其奇点是双曲的所有向量场所组成的集合$\mathscr{G}_1\subset\mathscr{X}^r(M)$是在$\mathscr{X}^r(M)$中开且稠的，在这一节中我们将证明在$\mathscr{G}_1$中闭轨为双曲的向量场集合$\mathscr{G}_{12}\subset\mathscr{G}_1$是剩余子集．为此只要证明：若$T>0$是任一整数，则周期$\leqslant T$的闭轨是双曲的向量场集合$\mathscr{X}(T)\subset\mathscr{G}_1$是开稠的，由于$\mathscr{G}_{12}=\bigcap_{T>1}\mathscr{X}(T)$，因而$\mathscr{G}_{12}$是剩余集．

2.1 引理． 设$p\in M$是$X\in\mathscr{X}^r(M)$的双曲奇点，对给定$T>0$，存在p的邻域$U\subset M$与X的邻域$\mathscr{U}\subset\mathscr{X}^r(M)$以及连续映射$\rho:\mathscr{U}\to U$使得

(i) 若$Y\in\mathscr{U}$，则$\rho(Y)$是Y在U中唯一的奇点，且它是双曲的；

(ii) 向量场$Y\in\mathscr{U}$过U的每一闭轨的周期都大于T．

证明． 在上一章中，我们已证明了(i)．

根据 Grobman-Hartman 定理，存在p的邻域V使得$Y\in\mathscr{U}$不存在整个含于V中的闭轨，因为$X(p)=0$，所以我们能找到包含在V中p的邻域U，使得若$q\in U$，那末对$t\leqslant 2T$，$X_t(q)\in V$，如必要可缩小$\mathscr{U}$，使得对$t\leqslant T$，有$Y_t(q)\in V$，只要$q\in U$以及$Y\in\mathscr{U}$．因为Y没有整个含于V中的闭轨，所以引理得证． □

2.2 引理. 设 $T>0$，设 γ 是向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的双曲闭轨，则存在 γ 的邻域 $U\subset M$ 以及 X 的邻域 $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}^r(M)$，使得：

(i) 每一 $Y\in\mathscr{U}$ 有一双曲闭轨 $\gamma_Y\subset U$，且 Y 过 U 的每一不同于 γ_Y 的闭轨的周期大于 T；

(ii) 闭轨 γ_Y 连续依赖于 Y.

证明. 过 γ 上一点 p 作匀断截痕 Σ，设 $P_X: V\to\Sigma$ 是相伴于 X 的 Poincaré 映射，设 τ 是 γ 的周期且 n 是使 $n\tau>2T$ 的正整数. 对于充分小 $V\subset\Sigma$，P_X^n 在 V 上有定义. 因为 Poincaré 映射连续依赖于向量场，所以存在 X 的邻域 $\mathscr{U}$，使得若 $Y\in\mathscr{U}$，P_Y^n 在 V 上亦有定义. 因为 p 是 P_X 的双曲不动点，所以对于适当小的 $\mathscr{U}$ 与 V，存在连续映射 $\rho: \mathscr{U}\to V$，把每一 $Y\in\mathscr{U}$ 映到 P_Y 在 V 中的唯一的不动点 $\rho(Y)$，且这个不动点是双曲的. 若 γ_Y 是 Y 过 $\rho(Y)$ 的轨道，那末 γ_Y 是双曲闭轨，显然 γ_Y 连续依赖于 Y. 由关于微分同胚的 Grobman-Hartman 定理以及 Poincaré 映射对于向量场的连续依赖性；存在 p 的邻域 $\tilde{V}\subset V$ 以及 X 的邻域 $\mathscr{U}$，使得对所有 $Y\in\mathscr{U}$ 以及所有 $q\in\tilde{V}$，$P_Y^k(q)\in V$，其中 $k=1,\cdots,n$. 因此对于适当小的 $\mathscr{U}$，$Y\in\mathscr{U}$ 的过 $q\in\tilde{V}$ 不同于 γ_Y 的每一闭轨有大于 T 的周期，因为 q 不可能是 P_Y 的周期小于或等于 n 的周期点. 现在取 $U=\bigcup\limits_{t\in[0,\tau+\varepsilon]}X_t\tilde{V}$ 就行了，这里 $\varepsilon>0$ 足够小. □

推论. 设 $X\in\mathscr{G}_{12}$，即 X 的一切奇点与闭轨都是双曲的. 给定 $T>0$，则仅存在有限条周期 $\leqslant T$ 的闭轨，特别地 X 至多有可数条闭轨.

证明. 假定 X 有无穷多条闭轨，其周期 $\leqslant T$，设 γ_n 是这种闭轨的序列，且当 $n\neq n'$ 时，$\gamma_n\neq\gamma_{n'}$. 取 $p_n\in\gamma_n$，因为 M 是紧致的，所以我们能假定(必要时改用它的子序列即可) p_n 收敛于 p. 于是 p 的轨道是在由周期 $\leqslant T$ 的无穷多条闭轨所组成的集合的闭包之中，由引理 2.1，p 不可能是奇点，而由引理 2.2，p 的轨道不可能是闭的，于是 p 的轨道是正则的，设 $p'=X_{-T}(p)$ 以及 $p''=X_T(p)$，设 F 是包含 p 的轨道弧 $p'p''$ 的流匣. 若 p_n 是充分邻近

于 p 的，则对 $t\in\left[-\frac{1}{2}T,\ \frac{1}{2}T\right]$，$X_t(p_n)\in F$，因而 p_n 的轨道的周期大于 T，这显然不可能. □

2.3 引理. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，设 $K\subset M$ 是紧集，使得 X 在 K 中没有奇点，且 X 过 K 的点的闭轨的周期大于 T. 那末存在 X 的邻域 $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}^r(M)$，使得每一 $Y\in\mathscr{U}$ 在 K 中没有奇点，且过 K 中的点的 Y 的闭轨的周期 $>T$.

证明. 因为 K 是紧的，在 K 中 $X\neq 0$，所以存在 X 的邻域 $\mathscr{N}\subset\mathscr{X}^r(M)$，使得每一向量场 $Y\in\mathscr{N}$ 在 K 中没有奇点. 取 $p\in K$，因为过 p 的 X 的轨道要么正则，要么是周期大于 T 的闭轨，所以存在 $\varepsilon>0$ 以及 p 的邻域 U_p 使得对 $q\in U_p$，及一切 $t\in[\varepsilon,T+\varepsilon]$，有 $X_t(q)\notin U_p$. 由流对向量场的连续依赖性，存在 X 的邻域 $\mathscr{U}_p\subset\mathscr{N}$ 使得对一切 $Y\in\mathscr{U}$，同样的性质成立. 特别地，$Y\in\mathscr{U}$ 过 U_p 上的点的每一闭轨的周期大于 T. 设 $U_{p_1},\cdots,U_{p_k}$ 是紧集 K 的有限覆盖以及设 $\mathscr{U}=\bigcap_{i=1}^{k}\mathscr{U}_{p_i}$. 显然 $Y\in\mathscr{U}$ 过 K 上的点的每一闭轨的周期大于 T. □

设 X 是 M 上的 C^∞ 向量场，γ 是 X 的闭轨，Σ 是过 $p\in\gamma$ 的匀断截痕，设 $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}^r(M)$ 是 X 的邻域以及设 $V\subset\Sigma$ 是 p 的邻域，使得对一切 $Y\in\mathscr{U}$，Y 在 V 上的 Poincaré 映射有定义.

2.4 引理. 在上述条件下，存在 γ 的邻域 $U\subset M$. 具有如下性质：对给定 $\varepsilon>0$，存在 C^∞ 的向量场 $Y\in\mathscr{U}$，满足 $\|Y-X\|_r<\varepsilon$，使得 P_Y 在 $\Sigma\subset U$ 上仅有有限个不动点，都是初等的.

证明. 设 (F,f) 是中心为 p 的管流，使得

$$f^{-1}(\{0\}\times I^{m-1})=\Sigma\cap F,$$

且 f_*X 是 $[-b,\ b]\times I^{m-1}$ 上的单位向量场 C. 设 $\widetilde{C}$ 是定义在 $f(F)\subset\mathbb{R}^m$ 上的 C^∞ 向量场，使得 $\widetilde{C}$ 与 $\{-b\}\times I^{m-1}$ 和 $\{b\}\times I^{m-1}$ 匀断相交，且 $\widetilde{C}$ 过 $\{-b\}\times I^{m-1}$ 上的点的每一轨道与 $\{b\}\times I^{m-1}$ 相交. 于是，我们能定义映射 $L_{\widetilde{C}}:\ \{-b\}\times I^{m-1}\to\{b\}\times I^{m-1}$，把 $\{-b\}\times I^{m-1}$ 上的每一点映到它的轨道与 $\{b\}\times I^{m-1}$ 的交点. 根

据管道流定理，$L_{\tilde{C}}$ 是微分同胚．设

$$A=\left[-b,\ -\frac{1}{2}b\right]\times I^{m-1}\cup\left[\frac{1}{2}b,\ b\right]\times I^{m-1}\cup\left[-\frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}b\right]\times[I^{m-1}-I^{m-1}_{3/4}].$$

我们断言：给定 $\varepsilon>0$，存在 $\varepsilon_1>0$，使得对一切满足 $\|v\|<\varepsilon_1$ 的 $v\in\mathbb{R}^m$，我们能选择 C^∞ 向量场 $\tilde{C}$，使得在 $[-b,b]\times I^{m-1}$ 上有 $\|\tilde{C}-C\|_r<\varepsilon$，在 A 上有 $\tilde{C}=C$ 且若 $y\in I^m_{1/4}$，则 $I_{\tilde{C}}(-b,\ y)=(b,\ y+v)$．事实上，设 ψ: $[-b,\ b]\to\mathbb{R}^+$ 是 C^∞ 函数，使得若

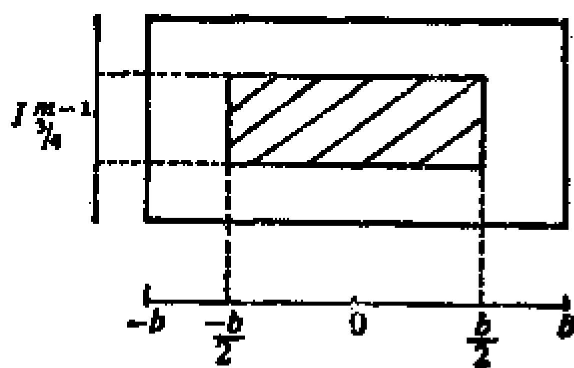


图 8

$$t\in\left[-b,\ -\frac{1}{2}b\right]\cup\left[\frac{1}{2}b,\ b\right],$$

有 $\psi(t)=0$，若 $t\in\left(-\frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}b\right)$，有 $\psi(t)>0$．取 φ: $I^{m-1}\to\mathbb{R}^+$，使得当 $\|y\|>\frac{3}{4}$ 时，有 $\varphi(y)=0$ 而当 $\|y\|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有 $\varphi(y)=1$．我们定义 $\tilde{C}(x,\ y)=(1,\ \rho\varphi(y)\psi(x)v)$．寻求实数 ρ 使得 $\tilde{C}$ 有所要求的性质．对应于 $\tilde{C}$ 的微分方程能写作

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=\rho\varphi(y)\psi(x)v.\end{cases}$$

这个方程具有初始条件 $x(0)=-b,\ y(0)=y_0\in I_{1/4}$ 的解能写成

$$x(t)=t-b,\ y(t)=y_0+\left(\int_0^t\rho\varphi(y(s))\psi(s-b)ds\right)v.$$

我们取
$$1/\rho=\int_0^{2b}\psi(s-b)ds.$$

易见，若 $\|v\|$ 充分小，对一切 $t\in[0,\ 2b]$，我们有

$$\|y(t)\|<\frac{1}{2}.$$

因此 $\varphi(y(s))=1$ 且

$$y(t)=y_0+\left(\rho\int_0^t \psi(s-b)\,ds\right)v$$

因而，$L_{\widetilde{C}}(-b,\ y_0)=(b,\ y_0+v)$，这就证明了我们的断言.

设 Y 是 M 上的向量场，它在 $f^{-1}([-b,\ b]\times I^{m-1})$ 之外等于 X，而在 $f^{-1}([-b,\ b]\times I^{m-1})$ 上等于 $(f^{-1})_*\widetilde{C}$. 显然 Y 是 C^∞ 的且 $\|Y-X\|_r<\varepsilon$. 我们记 Σ_1 是由 $f^{-1}(\{b\}\times I^{m-1})$ 所定义的匀断截痕. 设 $V\subset\Sigma_1$ 是 $p_1=f^{-1}(b,\ 0)$ 的小邻域使得在其上 Poincaré 映射 P_X 与 P_Y 都有定义. P_Y 在局部卡 $f|\Sigma_1$ 中的表示是

$$P_Y(b,\ y)=P_X(b,\ y)+v,$$

只要 $V\subset f^{-1}(\{b\}\times I_{1/4})$ 且 $y\in I_{1/4}$.

根据第一章的命题 3.8，我们能选择 $v\in\mathbb{R}^{m-1}$，$\|v\|<\varepsilon_1$，使得映射 $y\mapsto(y,\ P_Y(y))$ 是与 $\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R}^{m-1}$ 中的对角线匀断相交的，经过这样的选取，P_Y 在 V 中的不动点都是初等的. 引理得证.

□

2.5 引理. 设 γ 是 C^∞ 向量场 X 的闭轨. 给定 $\varepsilon>0$，在 M 上存在 C^∞ 向量场 Y，使得 $\|Y-X\|_r<\varepsilon$，且 γ 是 Y 的双曲闭轨.

证明. 设 $(F,\ f)$ 是以 γ 上的点为中心的管道流使得 f_*X 是在 $[-b,\ b]\times I^{m-1}$ 上的单位向量场. 我们将证明: 对给定的 $\varepsilon>0$ 存在 $\varepsilon_1>0$ 使得对任 $0<\delta<\varepsilon_1$，我们能找到 C^∞ 向量场 $\widetilde{C}$，使得在 $[-b,\ b]\times I^{m-1}$ 上，$\|\widetilde{C}-C\|_r<\varepsilon$; 在 A 上，$\widetilde{C}=C$; 且若 $y\in I^{m-1}_{1/4}$，则 $L_{\widetilde{C}}(-b,\ y)=(b,\ (1+\delta)y)$. 这里我们所用的记号与在引理 2.4 的证明中用的相同.

事实上，设 ψ: $[-b,\ b]\to\mathbb{R}^+$ 是 C^∞ 函数，使得当

$$t\in\left[-b,\ -\frac{1}{2}b\right]\cup\left[\frac{1}{2}b,\ b\right]$$

时，有 $\psi(t)=0$，若 $t\in\left(-\frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}b\right)$，有 $\psi(t)>0$. 取 φ: $I^{m-1}\to\mathbb{R}^+$，使得当 $\|y\|\geqslant\frac{3}{4}$ 时，$\varphi(y)=0$; 当 $\|y\|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\varphi(y)=1$ 以及当 $\frac{1}{2}<\|y\|<\frac{3}{4}$ 时，$\varphi(y)>0$. 我们定义 $\widetilde{C}(t,\ y)=(1,\ \rho\varphi(y)\psi(t)y)$.

寻求ρ使得$\widetilde{C}$满足所要求的条件．这点直接从在A上$\widetilde{C}=C$的定义得到．对应于$\widetilde{C}$的微分方程能写成

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=1, \\ \\ \dfrac{dy}{dt}=\rho\varphi(y)\psi(x)y. \end{cases}$$

设$y_0\in I^{m-1}$，满足$\|y_0\|\leqslant\frac{1}{4}$．我们有$\varphi(y_0)=1$，且在$y_0$的某一邻域中，$\varphi(y)=1$．上面方程具有初始条件$x(0)=-b$，$y(0)=y_0$的解能写成，

$$x(t)=t-b,$$
$$y(t)=y_0+\int_0^t\rho\varphi(y(s))\psi(s-b)y(s)ds.$$

由$y(s)$的连续性，存在$l>0$，使得对一切$s\in\left[0,\ -\frac{1}{2}b+l\right]$有$\varphi(y(s))=1$．因此在$\left[0,\ -\frac{1}{2}b+l\right]$中

$$y(t)=y_0\exp\left(\rho\int_0^t\psi(s-b)ds\right),$$

我们能通过求微分来验证它．设

$$\mu(t)=\exp\left(\rho\int_0^t\psi(s-b)ds\right).$$

则$\mu(0)=1$，对于

$$0<\rho<s_1=\log 2/\int_0^{2b}\psi(s-b)ds,$$

μ是一增函数，$0<\mu(2b)\leqslant 2$以及

$$\|y(s)\|\leqslant 2\|y_0\|\leqslant\frac{1}{2}.$$

所以，对一切$s\in[0,\ 2b]$，$\varphi(y(s))=1$．因此，$y(s)=\mu(s)y_0$且$L_{\widetilde{C}}(-b,\ y_0)=(b,\ \mu(2b)y_0)$．易见，我们能选择$\rho$使$\mu(2b)=1+b$，此处$0<\delta<s_1$．于是$L_{\widetilde{C}}(-b,\ y_0)=(b,\ (1+\delta)y_0)$．而且当取$\rho$充分小时，显然得到$\|C-\widetilde{C}\|_r<s$．

设Y是M上的向量场，它在$f^{-1}([-b,\ b]\times I^{m-1})$之外等于$X$．在$f^{-1}([-b,\ b]\times I^{m-1})$上等于$(f^{-1})_*\widetilde{C}$．显然$Y$是$C^\infty$的，

$\|Y-X\|_r<\varepsilon$, 且γ仍是Y的闭轨. 我们要证, 对于充分小的δ, γ是Y的双曲闭轨. 事实上, 令$\Sigma=f^{-1}(\{b\}\times I^{m-1})$, 在局部卡$f|\Sigma$中Poincaré映射的表示是

$$P_Y(b,\ y)=(1+\delta)P_X(b,\ y),\quad 当\ \|y\|<\frac{1}{4}\ 时.$$

于是, $$D(P_Y)_{(b,0)}=(1+\delta)D(P_X)_{(b,0)},$$

对于适当小的$\delta>0$, $D(P_Y)_{(b,0)}$的特征值的绝对值不等于1.

□

注. 在引理2.4与2.5中我们研究的是C^∞向量场X而扰动是在C^r拓扑中进行的. 若X是C^r的, 这些引理的证明不能象上面那样进行. 这是因为管道流$(F,\ f)$是C^r的而向量场$(f^{-1})_*\tilde{C}$仅是C^{r-1}的. 然而读者能证明, 对给定的$\varepsilon>0$, 存在C^∞向量场, εC^r邻近X, 且在γ附近有闭轨$\tilde{\gamma}$. 在这一章末尾, 我们将回到这个问题上.

2.6 定理. 设$\mathscr{G}_{1,2}$是由临界元素(即奇点与闭轨)是双曲的所有向量场所组成的集合, 则$\mathscr{G}_{12}$是在$\mathscr{X}^r(M)$中剩余的(因而亦是稠密的).

证明. 取$T>0$, 考虑集合

$\mathscr{X}(T)=\{X\in\mathscr{G}_1,\ X$中所有具有周期$\leqslant T$的闭轨是双曲的$\}$.

我们将证明, $\mathscr{X}(T)$在$\mathscr{X}^r(M)$中是开且稠的, 由于$\mathscr{G}_{12}$等于$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{X}(n)$, 故它是剩余集.

第1部分. $\mathscr{X}(T)$在$\mathscr{X}^r(M)$中是开的.

设$X\in\mathscr{X}(T)$, 由引理2.2的推论, X仅有有限条周期$\leqslant T$的闭轨, 选$p\in M$, 我们有三种情况需要讨论:

(a) p是X的奇点;

(b) $\mathscr{O}(p)$是正则的或周期$>T$的闭轨;

(c) $\mathscr{O}(p)$是周期$\leqslant T$的闭轨(因而它们是双曲的).

在情况(a)中, 由引理2.1, 存在p在M中的邻域U_p以及X在$\mathscr{X}^r(M)$中邻域$\mathscr{N}_p$使得每一向量场$Y\in\mathscr{N}_p$仅有一个奇点$\rho(Y)\in U_p$. $\rho(Y)$是双曲的, 且Y的每一个与U_p相交的闭轨的

周期 $>T$.

在情况(b)中，由管道流定理，在 M 中存在 p 的邻域 U_p，使得与 $\bar{U}_p$ 相交的任一闭轨的周期 $>T$ 且 X 在 $\bar{U}_p$ 中没有奇点. 由引理 2.3，存在 X 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{N}_p$，使得每一向量场 $Y\in\mathscr{N}_p$ 在 $\bar{U}_p$ 中没有奇点且 Y 过 $\bar{U}_p$ 上的闭轨的周期 $>T$.

在情况(c)中，由引理 2.2，在 M 中存在 $\mathscr{O}(p)$ 的邻域 U_p 以及在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中 X 的邻域 $\mathscr{N}_p$，使得任意的 $Y\in\mathscr{N}_p$ 在 U_p 中仅有一条闭轨 γ_Y，是双曲的，与 U_p 相交的 Y 的一切其它闭轨的周期 $>T$，而且 Y 在 U_p 中没有奇点.

$\{U_p;\ p\in M\}$ 是 M 的开覆盖，选取一有限子覆盖 $U_1, \cdots, U_l$，设 $\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2, \cdots, \mathscr{N}_l$ 是对应于在情况(a)，(b)以及(c)中所得到的在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的 X 的邻域，令 $\mathscr{U}=\mathscr{N}_1\cap\cdots\cap\mathscr{N}_l$. 易见任一向量场 $Y\in\mathscr{U}$ 有周期 $\leqslant T$ 的闭轨邻近于对应的 X 的闭轨，且它们仍是双曲的，Y 有与 X 同样数目的奇点(也还是双曲的)这就证明了定理的第 1 部分.

第 2 部分. $\mathscr{X}(T)$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中稠.

只要证明 $\mathscr{X}(T)$ 在 $\mathscr{G}_1$ 中稠. 故取 $X\in\mathscr{G}_1$.

断言 1　存在 $\tau<0$，使得 X 的每一闭轨的周期 $\geqslant\tau$.

假定存在由相异闭轨组成的序列 $\{\gamma_n\}$，它们的周期序列 $\{t_n\}$ 递减地趋向于 0，取点列 $p_n\in\gamma_n$，若有必要，则改为子序列，我们能假定 p_n 收敛于某点 $p\in M$. 点 p 必为 X 的奇点，否则将存在包含 p 的流匣，并且与它相交的闭轨将没有任意小的周期. 因 $X\in\mathscr{G}_1$，故 p 是双曲奇点，由引理 2.1，存在 p 在 M 中的邻域 U，使得 X 的每一与 U 相交的闭轨的周期大于 1，这个矛盾证明了断言 1.

考虑集合

$$\begin{aligned}\Gamma&=\Gamma(\tau,\ 3\tau/2)\\&=\{p\in M,\ \mathscr{O}(p)\text{是闭的，周期为 } t\text{，且 }\tau\leqslant t\leqslant 3\tau/2\}\end{aligned}$$

断言 2 .　Γ 是紧的.

只要证明 Γ 是闭的即可，设 p_n 是 Γ 中的序列，$p_n\to p$，如上面所指出的，p 不可能是 X 的奇点，若 p 的轨道是正则的或具有

周期大于 $3\tau/2$ 的闭轨，那末通过邻近于 p 的点的 X 的闭轨的周期将大于 $3\tau/2$，这是矛盾的。于是 $\mathcal{O}(p)$ 是周期介于 τ 与 $3\tau/2$ 之间的闭轨，这就证明了断言 2。

给定 $\varepsilon>0$，我们要找 $Y\in\mathscr{X}(T)$ 满足 $\|X-Y\|_r<\varepsilon$，以便结束此证明。首先，我们略述 Y 的构造，把 T 表示为 $\frac{1}{2}n\tau+q$，其中 $0\leqslant q<\frac{1}{2}\tau$。我们先用满足 $\|X-\tilde{X}\|_r<\varepsilon/2n$ 的 C^∞ 向量场 $\tilde{X}$ 逼近 X，然后用满足 $\|\tilde{X}-Y_1\|_r<\varepsilon/2n$ 的 C^∞ 向量场 $Y_1\in\mathscr{X}(3\tau/2)$ 来逼近 $\tilde{X}$，再用满足 $\|Y_1-Y_2\|_r<\varepsilon/n$ 的 C^∞ 向量场 $Y_2\in\mathscr{X}(2\tau)$ 来逼近 Y_1。类似地，我们重复 Y_2 逼近 Y_1 的过程，并进行 $n-1$ 次，于是得到 C^∞ 向量场 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，使得 $Y_j\in\mathscr{X}\left(\frac{1}{2}j\tau+\tau\right)$ 以及 $\|Y_{j+1}-Y_j\|_r<\varepsilon/n$。其次，我们令 $Y=Y_n$，则 $Y\in\mathscr{X}(T)$ 且 $\|Y-X\|_r<\varepsilon$。

用 $Y_1\in\mathscr{X}(3\tau/2)$ 逼近 $\tilde{X}$。

设 $p_1, \cdots, p_s$ 是 $\tilde{X}$ 的奇点。由引理 2.1，存在 $p_1, \cdots, p_s$ 的邻域 $U_1, \cdots, U_s$ 以及 $\tilde{X}$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{N}_1\subset\mathscr{G}_1$，使得对一切 $Y\in\mathscr{N}_1$，Y 与 $U=U_1\cup U_2\cdots\cup U_s$ 相交的闭轨的周期大于 T，而且，我们能假定任一 $Y\in\mathscr{N}_1$ 在 $M-U$ 中没有奇点。从现在起，我们仅限于讨论 $\mathscr{N}_1$ 中的向量场。

设 γ 是在 Γ 中的 $\tilde{X}$ 的闭轨且 Σ_γ 是过 $p\in\gamma$ 的匀断截痕。考虑 p 的邻域 $V_\gamma\subset\Sigma_\gamma$ 以及 $\tilde{X}$ 的邻域 $\mathscr{N}_\gamma$，使得对一切 $Y\in\mathscr{N}_\gamma$，P_Y^2 在 V_γ 上有定义以及过 V_γ 上点的 Y 的正向轨道与 Σ_γ 第一次相交的时间 $t>3\tau/4$。我们考虑 γ 的邻域 W_γ，使得过 W_γ 上任一点的 Y 的正向轨道与 Σ_γ 至少相交两次。

对应于 Γ 中所有闭轨 γ 的那些开集 W_γ 覆盖了紧集 Γ。设 $W_1, \cdots, W_k$ 是有限子覆盖，且设 $\mathscr{N}_{\gamma_1}, \cdots, \mathscr{N}_{\gamma_k}$ 是 $\tilde{X}$ 对应的邻域，令

$$\mathscr{N}_2=\mathscr{N}_{\gamma_1}\cap\cdots\cap\mathscr{N}_{\gamma_k}$$

与

$$W=W_1\cup\cdots\supset W_k.$$

考虑紧集 $K=M-(U\cup W)$. 因 $\widetilde{X}$ 在 K 中没有奇点以及过 K 的 $\widetilde{X}$ 的每一闭轨的周期大于 $3\tau/2$, 由引理 2.3, 存在 $\widetilde{X}$ 的邻域 $\mathcal{N}_3\subset\mathcal{N}_2$, 使得过 K 上点的任一 $Y\in\mathcal{N}_3$ 的闭轨的周期大于 $3\tau/2$. 从现在起我们仅限于讨论 $\mathcal{N}_3$ 中的向量场. 对 $j=1,\cdots,k$ 以及对每一 $Y\in\mathcal{N}_3$, 考虑 Poincaré 映射 P_{jY}: $V_j\to\Sigma_j$. 由引理 2.4, 我们能用 C^∞ 场 $\widetilde{Y}_1$ 去逼近 $\widetilde{X}$, 使得 $P_{1\widetilde{Y}_1}$ 在 $W_1\cap\Sigma_1$ 中仅有初等不动点. 我们在上一章中已经看到, 每一充分邻近 $\widetilde{Y}_1$ 的向量场具有相同的性质. 于是我们能用向量场 $\widetilde{Y}_2$ 去逼近 $\widetilde{Y}_1$ 使得 $P_{1\widetilde{Y}_2}$ 与 $P_{2\widetilde{Y}_2}$ 在 $W_1\cap\Sigma_1$ 和 $W_2\cap\Sigma_2$ 中仅有初等不动点. 重复这个论述, 我们得到向量场 $\widetilde{Y}_k$ 任意邻近于 $\widetilde{X}$, 对于它 Poincaré 映射 $P_{j\widetilde{Y}_k}$ 在 $W_j\cap\Sigma_j$ 中, $j=1,\cdots,k$, 仅有初等不动点. 设 $\mu_1,\cdots,\mu_l$ 是对应于这些 Poincaré 映射不动点的 $\widetilde{Y}_k$ 的闭轨. $\widetilde{Y}_k$ 的其它闭轨的周期 $>3\tau/2$, 而且存在邻域 $\mathcal{N}(\widetilde{Y}_k)$ 使得每一场 $Y\in\mathcal{N}(\widetilde{Y}_k)$ 有周期 $\leqslant 3\tau/2$ 的初等闭轨, 邻近于 $\mu_1,\cdots,\mu_l$.

重复应用引理 2.5, 我们用 C^∞ 向量场 Y_1 逼近 $\widetilde{Y}_k$, Y_1 的周期小于或者等于 $3\tau/2$ 的闭轨与 $\widetilde{Y}_k$ 的这些闭轨相同, 且它们对于 Y_1 是双曲的. 因而我们有 $Y_1\in\mathscr{X}(3\tau/2)$.

因 $\mathscr{X}(3\tau/2)$ 是开的, 存在 Y_1 的邻域 $\mathcal{N}_4$ 包含在 $\mathscr{X}(3\tau/2)$ 中, 如同引理 2.2, 考虑 Y_1 的周期小于或等于 $3\tau/2$ 的闭轨邻域 $U_{s+1},\cdots,U_{s+l}$, 令

$$U=\bigcup_{i=1}^{s+l}U_i,$$

于是过 U 的点邻近于 Y_1 的场的每一闭轨或是双曲的或是周期大于 $3\tau/2$.

用 $Y_2\in\mathscr{X}(2\tau)$ 逼近 Y_1,

由 $\Gamma=\Gamma(3\tau/2,2\tau)$ 的紧性以及引理 2.4 与引理 2.5, 与前面相同, 我们得到 Γ 的邻域 W, 使得 Y_1 能被 Y_2 逼近, 其中 Y_2 过 W 上点的闭轨要么是双曲的, 要么周期大于 2τ. 因 Y_1 在紧集 $K=M-(U\cup W)$ 中的闭轨的周期大于 2τ, 由此我们能选 Y_2 是 $\mathscr{X}(2\tau)$ 中的 C^∞ 场. 类似地, 我们能得到 $Y_3,\cdots,Y_n$, 这就完成了稠密性的证明. □

§3. 不变流形的匀断相交性

在这一节我们将完成 Kupka-Smale 定理的证明.

我们称向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是 Kupka-Smale 向量场,若它满足如下性质:

(a) X 的临界元素(奇点与闭轨)是双曲的,即 $X\in\mathscr{G}_{12}$,

(b) 若 σ_1 与 σ_2 是 X 的临界元素,那末,不变流形 $W^s(\sigma_1)$ 与 $W^u(\sigma_2)$ 是匀断相交的.

我们用 $\mathscr{G}_{123}$ 或 K-S 记所有 Kupka-Smale 向量场组成的集合.

3.1 定理. (Kupka-Smale). K-S 是在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中剩余的.

我们已经证明了 $\mathscr{G}_{12}$ 是在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中剩余的,于是剩下来仅要证 K-S 是在 $\mathscr{G}_{12}$ 中剩余的,我们将把这个事实的证明分成下面一些引理.

为了简化记法,我们约定 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的奇点是周期为零的临界元素. 于是若 $T>0$ 且 $X\in\mathscr{X}(T)$,那末 X 仅有有限个周期 $\leqslant T$ 的临界元素,且它们是双曲的. 设 $\overline{\mathscr{X}}(T)$ 是 $\mathscr{X}(T)$ 中如下向量场 X 的集合:若 σ_1 与 σ_2 是 X 的周期 $\leqslant T$ 的临界元素,则 $W^s(\sigma_1)$ 与 $W^u(\sigma_2)$ 是匀断相交的.

3.2 引理. 若对于一切 $T\geqslant 0$, $\overline{\mathscr{X}}(T)$ 是在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中剩余的,那末 K-S 是剩余的.

证明. 因 $\text{K-S}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathscr{X}}(n)$,且每一 $\overline{\mathscr{X}}(n)$ 是剩余的,由此 K-S 是剩余的. □

3.3 引理. 设 E 是可分的 Baire 空间以及 $F\subset E$ 是稠密子集,子集 $U\subset E$ 是剩余的,当且仅当每一 $x\in F$,有邻域 V_x 使得 $U\cap V_x$ 是在 V_x 中剩余的.

证明. 设 $V_{x_1},\cdots,V_{x_n},\cdots$ 是 F 的可数的覆盖,使得对一切 i, $U\cap V_{x_i}$ 是在 V_{x_i} 中剩余的. 于是 $U\cap V_{x_i}\supset\bigcap_{j=1}^{\infty}U_{ij}$,其中 $U_{ij}V_{x_i}$

中开与稠. 设 $\tilde{V}=\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{\varepsilon_i}$ 以及 $W_{ij}=U_{ij}\cup(\tilde{V}-\bar{V}_{\varepsilon_j})$, 那末 $\tilde{V}$ 和 W_{ij} 是开与稠的, 易见 U 包含 $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty} W_{ij}$. 于是 U 是剩余的. 充分性证毕, 而必要性是显然的. □

推论. 若对一切 $T\geqslant 0$ 以及对一切 $X\in\mathscr{X}(T)$, 存在 X 的邻域 $\mathscr{N}$, 使得 $\overline{\mathscr{X}}(T)$ 是在 $\overline{\mathscr{X}}$ 中剩余的, 那末 K-S 是剩余的.

证明. 这可由引理 3.2, 3.3 以及 $\mathscr{X}(T)$ 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中的稠密性得到. □

设 $X\in\mathscr{X}(T)$ 且设 $\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ 是 X 的周期 $\leqslant T$ 的临界元素, 对于每一 i, 分别取 σ_i 在 $W^s(\sigma_i)$ 与 $W^u(\sigma_i)$ 中的紧邻域 $W_0^s(\sigma_i)$ 与 $W_0^u(\sigma_i)$, 使得 $W_0^s(\sigma_i)$ 和 $W_0^u(\sigma_i)$ 的边界是关于 $W^s(\sigma_i)$ 与 $W^u(\sigma_i)$ 的基本域, 设 Σ_i^s 是 M 的余维为 1 的子流形, 它与向量场 X 匀断相交且亦与 σ_i 的局部稳定流形匀断相交, 它与后者相交在基本域 $\partial W_0^s(\sigma_i)$ 中, 见图 9.

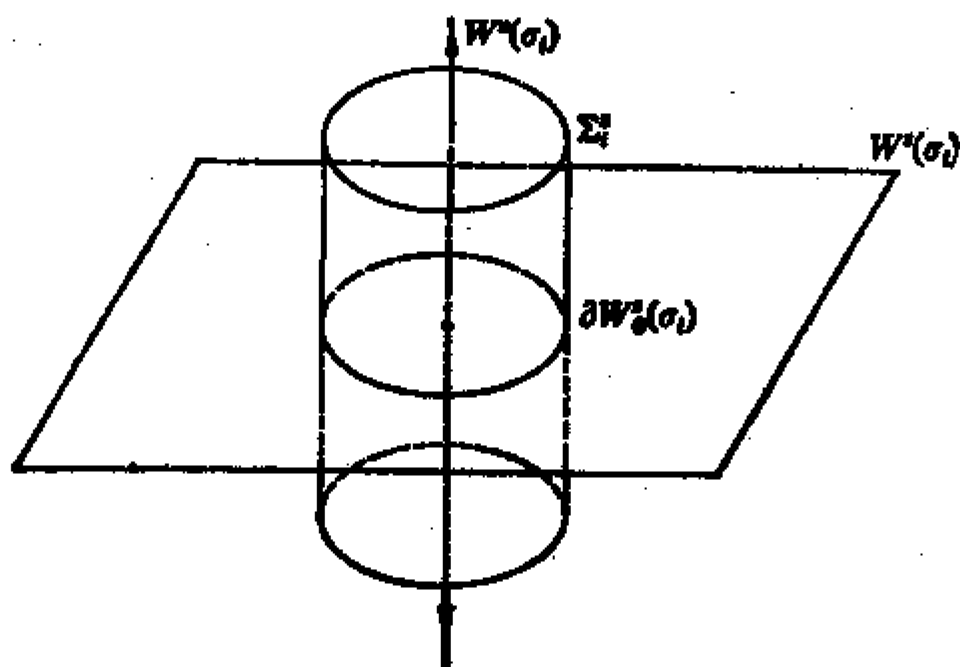


图 9

对于 X 的充分小邻域 $\mathscr{N}$ 中的每一 Y, Y 是与每一 Σ_i^s 匀断相交的, Y 的周期不大于 T 的临界元素是双曲的, 且靠近 X 的对应的临界元素, 于是, 若 $\sigma_1(Y), \cdots, \sigma_s(Y)$ 是 Y 的周期不大于 T 的临界元素, 那末存在 $\sigma_i(Y)$ 在 $W^s(\sigma_i, Y)$ 中的紧邻域 $W_0^s(\sigma_i, Y)$,

它的边界是 Σ_i 与 $W_0^s(\sigma_i, Y)$ 的交集. 根据稳定流形定理, 映射 $Y\mapsto W_0^s(\sigma_i, Y)$ 是连续的, 即给定 $Y_0\in\mathcal{N}$ 以及 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得若 $\|Y-Y_0\|_r<\delta$, 那末 $W_0^s(\sigma_i, Y)$ 是 εC^r 邻近于 $W_0^s(\sigma_i, Y_0)$. 类似地, 对每一 $Y\in\mathcal{N}$ 以及每一 $i=1,\cdots,s$. 我们在 $W^u(\sigma_i, Y)$ 中构造 $\sigma_i(Y)$ 的一紧邻域 $W_0^u(\sigma_i, Y)$, 使得映射 $Y\mapsto W_0^u(\sigma_i, Y)$ 是连续的.

对每一正整数 n, 我们定义

$$W_n^s(\sigma_i, Y)=Y_{-n}(W_0^s(\sigma_i, Y))$$

以及
$$W_n^u(\sigma_i, Y)=Y_n(W_0^u(\sigma_i, Y)).$$

显然映射 $Y\mapsto W_n^s(\sigma_i, Y)$ 和 $Y\mapsto W_n^u(\sigma_i, Y)$ 是连续的, 因为 Y_n 与 Y_{-n} 是连续依赖于 Y 的微分同胚, 而且 $W_n^s(\sigma_i, Y)$ 与 $W_n^u(\sigma_i, Y)$ 是带边的紧子流形,

$$W^s(\sigma_i, Y)=\bigcup_{n>0}W_n^s(\sigma_i, Y)$$

以及
$$W^u(\sigma_i, Y)=\bigcup_{n>0}W_n^u(\sigma_i, Y).$$

设 $\overline{\mathscr{X}}_n(T)$ 是 $\mathcal{N}$ 中如下向量场 Y 的集合: 对于一切 i 和 j, $W_n^s(\sigma_i, Y)$ 与 $W_n^u(\sigma_j, Y)$ 匀断相交.

3.4 引理. 设 $X\in\mathscr{X}(T)$, 且设 $\mathcal{N}$ 是 X 的如上所述的邻域, 若对一切 $n\in\mathbb{N}$, $\overline{\mathscr{X}}_n(T)$ 在 $\mathcal{N}$ 中开与稠, 那末 $\overline{\mathscr{X}}(T)\cap\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{N}$ 中是剩余的.

证明. 注意到

$$\mathscr{X}(T)\cap\mathcal{N}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathscr{X}}_n(T)$$

就够了. □

3.5 引理. 设 $X\in\overline{\mathscr{X}}(T)$, 且设 $\mathcal{N}$ 是 X 的如上所述的邻域, 则对一切 $n\in\mathbb{N}$, $\overline{\mathscr{X}}_n(T)$ 在 $\mathcal{N}$ 中开与稠.

证明. 设 $\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ 是 X 的周期小于或等于 T 的临界元素, 我们用 $\overline{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$ 记使得 $W_n^s(\sigma_i, Y)$ 与 $W_n^u(\sigma_j, Y)$ 是匀断相交的向量场 $Y\in\mathcal{N}$ 的集合, 于是只要证明, 每一 $\overline{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$ 在 $\mathcal{N}$ 中开与稠即可.

第 1 部分. $\overline{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$ 的开性

设 $\tilde{X}\in\widetilde{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$. 因 $W^s_n(\sigma_i, \tilde{X})$ 与 $W^u_n(\sigma_j, \tilde{X})$ 是匀断相交的，且映射 $Y\mapsto W^s_n(\sigma_i, Y)$ 与 $Y\mapsto W^u_n(\sigma_j, Y)$ 是连续的，因而存在 $\tilde{X}$ 在 $\mathscr{N}$ 中的邻域 $\mathscr{N}_{i,j}$ 使得对于一切 $Y\in\mathscr{N}_{ij}$, $W^s_n(\sigma_i,Y)$ 与 $W^u_n(\sigma_j, Y)$ 匀断相交. 因此 $\mathscr{N}_{ij}\subset\widetilde{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$，这证明了这个集合是开的。

第 2 部分. $\widetilde{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$ 的稠密性

设 $\tilde{X}\in\mathscr{X}(T)\cap\mathscr{N}$，我们将证明，存在 $\tilde{X}$ 在 $\mathscr{N}$ 中的邻域 $\widetilde{\mathscr{N}}$，使得 $\widetilde{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)\cap\mathscr{N}$ 在 $\mathscr{N}$ 中开与稠. 特别地，$\tilde{X}$ 能用 $\widetilde{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)$ 中元素任意地逼近。

考虑紧集 $K=W^s_n(\sigma_i, \tilde{X})\cap W^u_n(\sigma_j, \tilde{X})$，若 $x\in K$，存在包含 x 的管道流 $(F_x, f_{\tilde{X},x})$ 以及正实数 b_x，使得 $f_{\tilde{X},x}(F_x)\supset[-b_x, b_x]\times I^{m-1}$ 且向量场 $(f_{\tilde{X},x})_*\tilde{X}$ 与在 $[-b_x, b_x]\times I^{m-1}$ 上的单位向量场重合. 设 $A_x\subset F_x$ 是 x 的开邻域且使 A_x 的闭包含于 $(f_{\tilde{X},x})^{-1}\times([-b_x, b_x]\times I^{m-1}_{1/4})$ 的内部. 必要时可缩小 F_x，于是我们总能假定 $W^s_{2n}(\sigma_i, \tilde{X})\cap F_x$ 以及 $W^u_{2n}(\sigma_j, \tilde{X})\cap F_x$ 各自仅有一个连通分支，设 $A_1, \cdots, A_l$ 是由这种开集组成的 K 的有限覆盖. 记 $(F_k, f_{\tilde{X},k})$ 为对应的管道流. 则 $(f_{\tilde{X},k})^{-1}([-b_k, b_k]\times I^{m-1}_{1/4})$ 包含 A_k，因为映射 $Y\mapsto W^s_n(\sigma_i, Y)$，所以 $Y\mapsto W^u_n(\sigma_j, Y)$ 是连续的，存在 $\tilde{X}$ 的在 $\mathscr{N}$ 中的邻域 $\widetilde{\mathscr{N}}$，使一切 $Y\in\widetilde{\mathscr{N}}$ 有

$$W^s_n(\sigma_i, Y)\cap W^u_n(\sigma_j, Y)\subset\bigcup_{k=1}^{l}A_k.$$

必要时缩小 $\widetilde{\mathscr{N}}$，我们总能假定，对每一 $Y\in\widetilde{\mathscr{N}}$ 以及 $k=1, \cdots, l$，存在关于 Y 的管道流 $(F_{Y,k}, f_{Y,k})$，其中 $F_{Y,k}\supset A_k$, $f_{Y,k}(F_{Y,k})\supset[-b_k, b_k]\times I^{m-1}$ 且使 $(f_{Y,k})^{-1}([-b_k, b_k]\times I^{m-1}_{1/4})$ 的内部包含 A_k 的闭包. 因为流连续依赖于向量场，所以这是可能的. 现设 $\widetilde{\mathscr{X}}_k$ 是使得在 $\bar{A}_k$ 的所有点，$W^s_n(\sigma_i, Y)$ 与 $W^u_n(\sigma_j, Y)$ 匀断相交的那些向量场 $Y\in\widetilde{\mathscr{N}}$ 的集合. 显然 $\widetilde{\mathscr{X}}_k$ 是 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 的开子集，因

$$\widetilde{\mathscr{X}}_{n,i,j}(T)\cap\widetilde{\mathscr{N}}=\bigcap_{k=1}^{l}\widetilde{\mathscr{X}}_k,$$

因此为达到我们的目的，只要证 $\widetilde{\mathscr{X}}_k$ 在 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 中稠即可。

我们来证 $\widetilde{\mathscr{X}}_k$ 在 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 中稠. 取 C^∞ 向量场 $Y\in\widetilde{\mathscr{N}}$, 我们用 $S_+(Y)$ 表示 $f_{Y,k}(W^s_n(\sigma_i, Y)\cap F_{Y,k})$ 与 $\{b_k\}\times I^{m-1}$ 的交集, 用 $U_+(Y)$ 表示 $f_{Y,k}(W^u_n(\sigma_j, Y)\cap F_{Y,k})$ 与 $\{b_k\}\times I^{m-1}$ 的交集. 易见, 若 $S_+(Y)$ 是与 $U_+(Y)$ 在 $\{b_k\}\times I^{m-1}_{1/4}$ 中匀断相交的, 那末 $W^s_n(\sigma_i,Y)$ 是在 A_k 中与 $W^u_n(\sigma_j, Y)$ 匀断相交的, 见图 10.

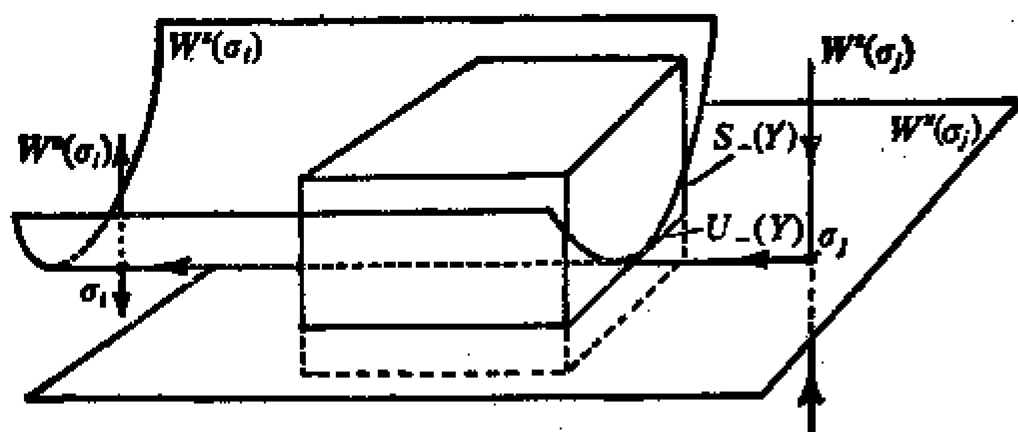


图 10

与引理的 2.4 的证明类似, 给定 $\varepsilon>0$ 以及 $v\in\mathbb{R}^{m-1}$, 具有 $\|v\|$ 充分小, 我们找 M 上的 C^∞ 向量场 $\widetilde{Y}$, 具有 $\|Y-\widetilde{Y}\|_r<\varepsilon$, 使得

(a) $f^{-1}_{Y,k}([-b_k, b_k]\times I^{m-1})$ 之外, $\widetilde{Y}=Y$;

(b) 对一切 $y\in I^{m-1}_{1/4}$, $L_{\widetilde{Y}}(-b, y)=(b, y+v)$. 这里 $b=b_k$ 而 $L_{\widetilde{Y}}$ 是从 $\{-b\}\times I^{m-1}$ 到 $\{b\}\times I^{m-1}$ 的映射, 它把每一点 $(-b,y)$ 映到 $(f_{Y,k})_*\widetilde{Y}$ 过点 $(-b, y)$ 的轨道与 $\{b\}\times I^{m-1}$ 的交点. 另一方面, 由第一章命题 3.3, 我们能选 v 适当小, 使 $S_+(Y)$ 将与 $U_+(Y)+v$ 匀断相交, 于是 $f^{-1}_{Y,k}(S_+(Y))$ 是 $W^s_{2n}(\sigma_i, \widetilde{Y})$ 与匀断截痕 $f^{-1}_{Y,k}(\{b_k\}\times I^{m-1})$ 的交集, 且 $f^{-1}_{Y,k}(U_+(Y)+v)$ 是 $W^u_{2n}(\sigma_j, \widetilde{Y})$ 与截痕 $f^{-1}_{Y,k}(\{b_k\}\times I^{m-1}_{1/4})$ 的交集. 于是我们推得, 这两个子流形是在 $f^{-1}([-b_k, b_k]\times I^{m-1}_{1/4})$ 中匀断相交的, 因而 $W^s_n(\sigma_i, \widetilde{Y})$ 与 $W^u_n(\sigma_j, \widetilde{Y})$ 在 $\bar{A}_k$ 上匀断相交. 这就证明了 $\widetilde{Y}\in\widetilde{\mathscr{X}}_k$.

于是, $\widetilde{\mathscr{N}}$ 中的任一 C^∞ 向量场能用 $\widetilde{\mathscr{X}}_k$ 中的向量场来逼近. 由于 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 中的任一向量场可用 C^∞ 场去逼近, 因此 $\widetilde{\mathscr{X}}_k$ 在 $\widetilde{\mathscr{N}}$ 中稠, 这就证明了引理. □

定理 3.1 是引理 3.2, 3.3, 3.4 与 3.5 的直接推论. □

注. 指出 K-S 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中不是开集, 是重要的. 事实上, 考

虑环面 T^2 上的无理流 X_t，因为 X_t 没有临界元素，所以向量场 $X\in$ K–S，然而 X 能用向量场 Y 来逼近，其中 Y_t 是有理流．Y 的一切轨道是闭的和非双曲的，于是 $Y\notin$ K–S．

现在我们来叙述关于微分同胚的 Kupka–Smale 定理，其证明与向量场的情形类似，将它作为练习留给读者，然而我们将介绍两种不同的证明的思路．

微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 称为 Kupka–Smale 微分同胚，若

(a) f 的周期点是双曲的，且

(b) 若 p 与 q 是 f 的周期点，则 $W^s(p)$ 与 $W^u(q)$ 是匀断相交的．

我们仍用 K–S 表示 Kupka–Smale 微分同胚的集合．

3.6 定理． K–S 是在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中剩余的．

证明大意： (1) 若 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 以及 $k\in\mathbb{N}$，我们记 $\tilde{f}^k$: $M\to M\times M$ 是由 $\tilde{f}^k(p)=(p, f^k(p))$ 定义的映射．若 p 是 f 的周期为 k 的周期点，那末 $\tilde{f}^k(p)=(p, p)$ 属于对角线 $\Delta\subset M\times M$．这种点 p 是初等的当且仅当 $\tilde{f}^k$ 是在 p 点与 Δ 匀断相交．设 $n\in\mathbb{N}$ 且设 $\mathscr{D}^n$ 是微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的集合，其中 f 对 $k=1, \cdots, n$ 使 $\tilde{f}^k$ 与 Δ 匀断相交，于是 $\mathscr{D}^n$ 是开与稠的．

(2) 设 $f\in\mathscr{D}^n$ 且设 p 是 f 的周期小于或等于 n 的周期点．显然可用 $g\in\mathscr{D}^n$ 来逼近 f，使得在 p 的邻域之外，$g=f$ 而 p 是 g 的双曲周期点．于是，由周期为 $k=1, \cdots, n$ 的周期点都是双曲的那些微分同胚所组成的集合 $\widetilde{\mathscr{D}}^n\subset\mathscr{D}^n$ 是开与稠的．

(3) 设 $\mathscr{G}^n$ 是在 $\mathscr{G}^n$ 中那些周期从 1 到 n 的周期点的稳定流形与不稳定流形两两匀断相交的那些微分同胚的集合．$\mathscr{G}^n$ 是剩余的，因 K–S $=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{G}^n$，由此，K–S 是剩余的． □

关于微分同胚的 Kupka–Smale 定理的另一证明能从关于向量场的相应的定理得到．为此，我们将需要一个构造，使我们能够把流形 M 上的微分同胚与维数高一维的流形 $\tilde{M}$ 上的向量场联系起来．这个构造被称为微分同胚的扭扩．

设 $X\in\mathscr{X}^r(\widetilde{M})$，且设 $\widetilde{\Sigma}\subset\widetilde{M}$ 是余维为 1 的紧子流形．我们说 $\widetilde{\Sigma}$ 是关于 X 的**整体痕**，若(a) X 是与 $\widetilde{\Sigma}$ 匀断相交，且(b) X 的过 $\widetilde{\Sigma}$ 上每点的正向轨道绕回后将再与 $\widetilde{\Sigma}$ 相交．

若 $\widetilde{\Sigma}$ 是关于 $X\in\mathscr{X}^r(\widetilde{M})$ 的整体匀断截痕，那末 X 的流导出一微分同胚 $\tilde{f}:\widetilde{\Sigma}\to\widetilde{\Sigma}$，把每一点 $\tilde{p}\in\widetilde{\Sigma}$ 映到 $\tilde{p}$ 的正向轨道与 $\widetilde{\Sigma}$ 的第一次相交的交点 $\tilde{f}(\tilde{p})$．微分同胚 $\tilde{f}$ 称为相伴于 $\widetilde{\Sigma}$ 的 Poincaré 映射．

易见，若 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 允许一整体匀断截痕 $\widetilde{\Sigma}$，那末由 X 的流产生的 $\widetilde{\Sigma}$ 的浸润与 $\widetilde{M}$ 相合，即

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}}X_t(\widetilde{\Sigma})=\widetilde{M},$$

特别地，X 没有奇点．

最后，我们指出，X 的轨道结构由 Poincaré 映射 $\tilde{f}$ 决定，反之亦然．事实上，如下事实是显然的：

(i) $\tilde{p}\in\widetilde{\Sigma}$ 是 $\tilde{f}$ 的周期点当且仅当 $\mathscr{O}_X(\tilde{p})$ 是闭的；

(ii) $\tilde{p}\in\widetilde{\Sigma}$ 是 $\tilde{f}$ 的双曲周期点当且仅当 $\mathscr{O}_X(\tilde{p})$ 是双曲闭轨；

(iii) 若 $\tilde{p}_1$ 与 $\tilde{p}_2$ 是 $\tilde{f}$ 的双曲周期点，那末 $W^s(\tilde{p}_1)$ 与 $W^u(\tilde{p}_2)$ 是匀断相交的当且仅当 $W^s(\mathscr{O}_X(\tilde{p}_1))$ 与 $W^u(\mathscr{O}_X(\tilde{p}_2))$ 是匀断相交的；

(iv) $\tilde{q}\in\omega(\tilde{p})$ 当且仅当 $\mathscr{O}_X(\tilde{q})\subset\omega(\mathscr{O}_X(\tilde{p}))$．

下面的命题说明每一微分同胚是某个向量场相伴于整体匀断截痕的 Poincaré 映射．

3.7 命题．设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$，其中 M 是紧流形，那末存在流形 $\widetilde{M}$，具有一整体匀断截痕 $\widetilde{\Sigma}$ 的向量场 $X\in\mathscr{X}^{r-1}(\widetilde{M})$ 以及 C^r 微分同胚 $h:M\to\Sigma$，它使 f 与 Poincaré 映射 $\tilde{f}:\widetilde{\Sigma}\to\widetilde{\Sigma}$ 共轭．

证明．在 $M\times\mathbb{R}$ 上考虑如下等价关系

$$(p,s)\sim(q,t)\leftrightarrow s-t=n\in\mathbb{Z}\text{ 且 }q=f^n(p).$$

设 $\widetilde{M}$ 是商空间 $M\times\mathbb{R}/\sim$，以及 $\pi:M\times\mathbb{R}\to\widetilde{M}$ 是自然投影．设 $\widetilde{\Sigma}\subset\widetilde{M}$ 表示在 π 下 $M\times\{0\}$ 的像，对每一 $t_0\in\mathbb{R}$，π 在 $M\times(t_0,t_0+1)$ 上的限制是 $M\times(t_0,t_0+1)$ 与 $\widetilde{M}-\pi(M\times\{t_0\})$ 之间的

一一对应，而且 $\pi(p,1)=\pi(f(p),0)$. 在 $\tilde{M}$ 上我们用由 π 导出的拓扑，即 $A\subset\tilde{M}$ 是开的当且仅当 $\pi^{-1}(A)$ 是开的.

我们证明 $\tilde{M}$ 有自然的微分流形的构造，且 π 是 C^r 局部微分同胚. 设 $x_i: U_i\to U_0\subset\mathbb{R}^m$, $i=1,\cdots,s$ 是 M 上的局部卡，使得

$$\bigcup_{i=1}^{s} U_i=M.$$

则
$$\tilde{U}_i=\pi\left(U_i\times\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right)$$
和
$$\tilde{V}_i=\pi\left(U_i\times\left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)\right)$$
在 $\tilde{M}$ 中开. 我们定义

$$\tilde{x}_i: \tilde{U}_i\to U_0\times\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

以及
$$\tilde{y}_i: \tilde{V}_i\to U_0\times\left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$$

分别为
$$\tilde{x}_i(\pi(p,\ t))=(x_i(p),\ t)$$
以及
$$\tilde{y}_i(\pi(p,\ t))=(x_i(p),\ t).$$
显然 $\tilde{x}_i$ 与 $\tilde{y}_i$ 是同胚，我们断言 $\{(\tilde{x}_i,\ \tilde{U}_i),\ (\tilde{y}_i,\ \tilde{V}_i),\ i=1,\ \cdots,\ s\}$ 是 $\tilde{M}$ 上的 C^r 图册. 事实上，

$$\tilde{x}_i\tilde{x}_j^{-1}(u,\ t)=(x_ix_j^{-1}(u),\ t),$$
$$\tilde{y}_i\tilde{y}_j^{-1}(u,\ t)=(x_ix_j^{-1}(u),\ t)$$
以及
$$\tilde{x}_i\tilde{y}_j^{-1}(u,\ t)=(x_ifx_j^{-1}(u),\ t-1)$$
是 C^r 微分同胚. 这就证明了断言.

事实上，我们可以认为 $\tilde{M}$ 是 C^∞ 流形. 因为由第一章定理 0.19, 在 $\tilde{M}$ 上存在 C^∞ 流形构造，使得 $\tilde{x}_i$ 与 $\tilde{y}_i$ 是 C^r 微分同胚.

由于 $\tilde{x}_i\circ\pi\circ(x_i^{-1}\times id)$ 是 $U_0\times\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 上的恒等映射而 $\tilde{y}_i\circ\pi\circ(x_i^{-1}\times id)$ 是 $U_0\times\left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$ 上的恒等映射因此有 π 是 C^r 局部微分同胚. 设 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是 $M\times\mathbb{R}$ 上的单位向量场，其轨道是直线 $\{p\}\times\mathbb{R}$, $p\in M$. 设

$$X(\pi(p,\ t))=d\pi(p,\ t)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}(p,\ t)\right).$$

易见 $$X(\pi(p,t))=X(\pi(f(p),t-1)).$$
于是 X 是 $\widetilde{M}$ 上 C^{r-1} 向量场. 场 X 与 $\widetilde{\Sigma}$ 匀断相交且过点 $\tilde{p}=\pi(p,0)$ 的 X 的轨道是 $\pi(\{p\}\times\mathbb{R})$. 于是 X 过点 $\tilde{p}=\pi(p,0)\in\Sigma$ 的正的轨道绕回后第一次再与 $\widetilde{\Sigma}$ 相交于点

$$\tilde{q}=\pi(p,1)=\pi(f(p),0).$$

因此, 相伴于 $\widetilde{\Sigma}$ 的 Poincaré 映射 $\tilde{f}\ \widetilde{\Sigma}\to\widetilde{\Sigma}$ 是由 $\tilde{f}(\pi(p,0))=\pi(f(p),0)$ 定义的, 由 $h(p)=\pi(p,0)$ 定义的映射 $h: M\to\widetilde{\Sigma}$ 是 C^r 微分同胚, 且 $\tilde{f}\circ h=h\circ f$. 这就完成了命题的证明. □

注. 由命题 3.7, C^r 微分同胚的扭扩是 C^{r-1} 向量场. 上面的构造在[30] 中被修改, 为给出 C^r 向量场作为 C^r 微分同胚的扭扩, 但我们将不利用这个事实.

用扭扩的方法证明 Kupka–Smale 微分同胚的稠密性. 取 $f_0\in\mathrm{Diff}^r(M)$, 首先, 我们用 C^∞ 微分同胚 f 逼近 f_0, 为了用 Kupka–Smale 微分同胚逼近 f, 考虑借助于扭扩 f 而得到的 $\widetilde{M}$ 上 C^∞ 向量场 X, 设 $h: M\to\widetilde{\Sigma}$ 是微分同胚, 它使 f 与 X 的 Poincaré 映射 $\tilde{f}: \widetilde{\Sigma}\to\widetilde{\Sigma}$ 共轭. 我们用 C^∞ Kupka–Smale 向量场 Y 在 C^r 拓扑下逼近 X. 记 $\tilde{g}: \widetilde{\Sigma}\to\widetilde{\Sigma}$ 为 Y 的 Poincaré 映射. 由于 $\tilde{g}$ 是 C^r 邻近于 $\tilde{f}$ 的 Kupka–Smale 微分同胚, 有 $g=h^{-1}\circ\tilde{g}\circ h$ 是 C^r 邻近于 f 的 Kupka–Smale 微分同胚. □

练　　习

1. 设 X_t 是由向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 生成的流. 设 γ 是 X 的周期为 λ 的双曲闭轨, 考虑微分同胚 $f=X_\lambda$ 以及点 $p\in\gamma$.

(a) 证明 T_pM 是两个子空间 H 与 H_0 的直和, H, H_0 关于 df_p 是不变的, 使得 H_0 是一维的且包含向量 $X(p)$.

(b) 证明若 $S\subset M$ 是一子流形, 它在 p 的切空间是 H, 设 $\pi: U\subset S\to S$ 是相伴于 γ 的 Poincaré 映射, 那末 $d\pi(p)=df(p)|H$.

2. 证明, 若 X 是 S^2 上的 Kupka–Smale 向量场, 那末它的任何轨道的 ω-极限是临界元素.

3. 证明 Kupka–Smale 向量场的集合是在 $\mathscr{X}^r(S^n)$中开的.

4. 证明 Kupka–Smale 向量场的集合是在 $\mathscr{X}^r(S^2)$中开的.

5. 设 γ 与 $\tilde{\gamma}$ 分别是向量场 X 与 $\tilde{X}$ 的闭轨，证明若存在从 γ 的邻域到 $\tilde{\gamma}$ 的邻域的同胚 h，它把 X 的轨道变到 $\tilde{X}$ 的轨道，且保持轨道定向，那末相伴于这些闭轨的 Poincaré 映射是共轭的，若 h 是微分同胚，那末 Poincaré 映射是借助微分同胚共轭的.

6. 证明任何二维紧流形上的 Kupka–Smale 向量场仅有有限条闭轨.

提示：任何二维紧流形，对于某个 n，若它是定向的，它就微分同胚于带有 n 个手柄的球面；若它是不可定向的，它就微分同胚于射影平面或具有 n 个手柄的 Klein 瓶，而 Klein 瓶是微分同胚于具有一个交叉帽的射影平面.

7. 证明二维紧流形上的结构稳定向量场是 Kupka–Smale 的

8. 画 S^2 上具有无限多个双曲临界元素的向量场的草图.

9. 设 $C\subset S^2$ 是圆. 考虑 $\mathscr{X}_C\subset\mathscr{X}^r(S^2)$ 是切于 C 的向量场集合.

(a) 证明 $\mathscr{X}_C\cap$ K–S 在 $\mathscr{X}_C$ 中不稠，

(b) 考虑具有如下性质的向量场集合 $KS_C\subset\mathscr{X}_C$：(i) 向量场的奇点和闭轨都是双曲的；(ii) 若 γ 是一条使 $\alpha(\gamma)$ 与 $\omega(\gamma)$ 为鞍点的轨道，那末 $\gamma\subset C$，证明，KS_C 是在 $\mathscr{X}_C$ 中开与稠的.

10. 设 $\mathrm{Grad}^r(M)\subset\mathscr{X}^r(M)$ 是 M 上梯度向量场的集合，即 $X\in\mathrm{Grad}^r(M)$ 当且仅当存在 $f\in C^{r+1}(M)$ 以及一 Riemann 度量 g，使得在度量中，$X=\mathrm{grad}\,f$. 证明 Kupka–Smale 向量场的集合是在 $\mathrm{Grad}^r(M)$ 中剩余的.

提示：证明，若在度量 g 下，$X=\mathrm{grad}\,f$，F 是关于 X 的流匣，Y 是邻近于 X 的向量场，在 $M-F$ 上 Y 与 X 重合，那末存在度量 $\tilde{g}$ 使得 Y 是 f 在度量 $\tilde{g}$ 下的梯度. 也应用第二章的练习 8.

11. (a) 证明，若 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是 Kupka–Smale 向量场，有大范围的匀断截痕，那末相伴的 Poincaré 映射是 Kupka–Smale 微分同胚.

(b) 证明 Kupka–Smale 微分同胚的扭扩是 Kupka–Smale 向量场.

12. (a) 证明若 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ $(r\geqslant 1)$ 是结构稳定的，那末它的周期轨道是双曲的.

(b) 证明若 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 是结构稳定的，那末 f 是 Kupka–Smale 微分同胚. 注意，在[98]中，C. Robinson 对于 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ $(r\geqslant 2)$ 证明了这个结果.

(c) 证明结构稳定向量场 $X\in\mathscr{X}^1(M)$ 是 Kupka–Smale 的.

注：下面的问题是没有解决的：证明结构稳定的向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ $(r\geqslant 3)$ 的闭轨是双曲的.

13. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是具有闭轨的向量场，设 X_t 是由向量场 X 所生成的流，证明微分同胚 X_1 不是结构稳定的.

14．证明在任意紧流形 $M^n(n\geqslant 1)$ 上，Kupka-Smale 微分同胚在 $\mathrm{Diff}^r(M)(r\geqslant 1)$ 中不是开的。

提示：证明任何流形有带有闭轨的 Kupka-Smale 向量场.

15．证明在任意紧流形 $M^n(n\geqslant 3)$ 上 Kupka-Smale 向量场的集合在 $\mathscr{X}^r(M)(r\geqslant 1)$ 中不是开的。

第四章 Morse-Smale 向量场的通有性与结构稳定性

我们曾强调，动力系统理论的中心目标是描述微分流形上的向量场的轨道结构，可是从第二章第三节的例子可以看出，在动力系统中存在着具有非常复杂的轨道结构的向量场. 为此，我们必须把这项研究工作限制在向量场空间的一个子集上. 最理想的是这个子集是开的与稠密的(或它的范围尽可能的大)，并且子集中的元素是轨道结构足够简单的结构稳定的向量场，从而，使我们有可能将它们分类. 就这个问题的局部形式而言，如我们在第二章中看到的，它已被完全解决了.

在这一章的第1和第2节中，我们将证明上述研究的大范围的情形可在紧致的二维流形上完成. 这个结果是由 Peixoto[81],[85] 给出的，它是这一理论的新近发展的开创性工作之一. 除了 Andronov-Pontryagin 的早期的基础性工作和随后 De Baggis 在圆盘 D^2 或球 S^2 上的工作(见[5], [47])以外，我们还要指出 Pliss[87] 对环面 T^2 上无奇点的向量场得到了与 Peixoto 同样的结果.

在高维情况下，结构稳定的向量场仍然是非常多的，但它们并不稠密. 这里存在更丰富、更复杂的现象，这种现象在初始向量场的小扰动下仍然存在. 甚至对于结构稳定的向量场，其极限集的轨道结构也还没有完全搞清楚，对它们的描述仍是一个活跃的研究领域. 这些事实将在第3和第4节中讨论.

由于这个原因，我们将再次强调，研究通有性质的重要性. 所谓通有性质就是几乎一切向量场(向量场的 Baire 子集)都满足的性质，上章中的 Kupka-Smale 定理就是这种情况.

最后，我们指出，对于一些有特殊意义的向量场空间的子集，

上述研究可能被提出来．与此最密切的例子是紧致流形上的梯度场，在所有梯度场组成的空间中，结构稳定场形成了开与稠的子集[79],[106]，我们将在第3节中指出它们的轨道结构的一些基本性质．

在第4节中，我们概述了关于结构稳定性的一般结果，特别地，我们还将描述具有无限多周期轨道的结构稳定系统．

§1．Morse–Smale 向量场，结构稳定性

这里，我们定义一类称为 Morse-Smale 系统的向量场，它在动力系统理论中起着重要的作用．这个类是非空的开子集，其元素是结构稳定的．虽然这些结论对于任意维的紧流形都是成立的[75],[79]，但在这一章中我们仅研究二维的情况，此时这个类还是稠密的．

这一节，我们先从定义 Morse–Smale 向量场开始，然后证明在 M^2 上的 Morse–Smale 向量场是结构稳定的．这里的证明是我们在[75]中引进的，它与原始证明不同[85]，可以推广到高维情况．

在正式给出 Morse–Smale 向量场族的定义之前，我们借助于一些例子来诱导这个定义．由于我们的目的是去寻找一类结构稳定的向量场，显然要求它的奇点与闭轨必须是双曲的．没有这个要求向量场甚至不是局部结构稳定的．我们还要强调，向量场的临界元素(奇点与闭轨)的稳定流形与非稳定流形的相交性在任何拓扑等价中必须保持下来，因此，自然要求这些相交是匀断的，因为匀断相交可以保证在向量场的小扰动下是不改变的．

例1．考虑环面 $T^2\subset\mathbb{R}^3$，且设 $X=\operatorname{grad} h$，这里 h 是图1中环面 T^2 上的点在水平面上方的高度函数．这个向量场有四个奇点 p_1, p_2, p_3, p_4，其中 p_1 是渊点，p_2, p_3是鞍点，p_4 是源点．p_2 的稳定流形与 p_3 的非稳定流形是非匀断相交的，正如在第一章中所述，我们能用向量场 X 的小扰动去破坏这种相交性，因此这个扰

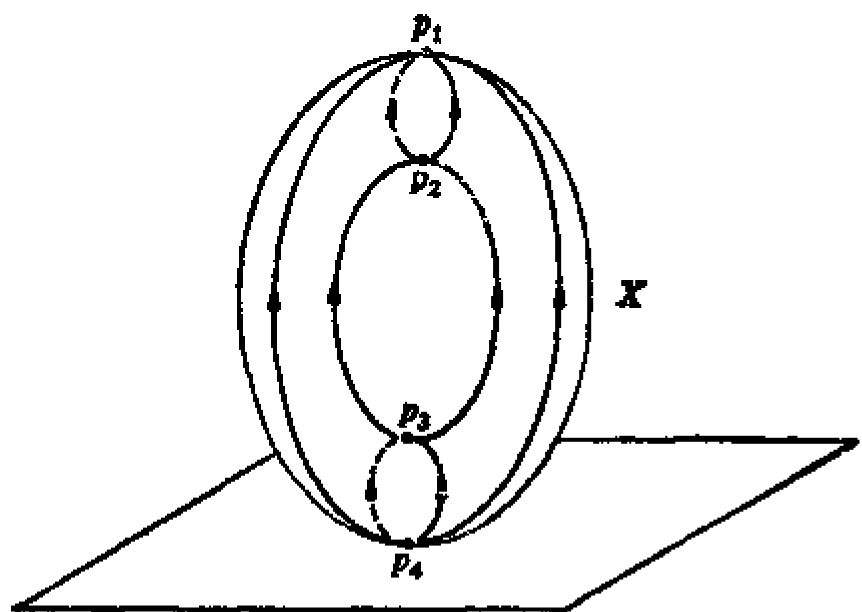


图 1

动后的向量场 Y 与 X 不等价.

迄今为止的讨论引导我们把 Morse–Smale 向量场定义为 Kupka–Smale 场的子集. 在这一点上，值得注意的是当说到向量场是 Kupka–Smale 的时候，我们并没有给出关于向量场一般轨线的 α 与 ω 极限集的信息. 既然向量场之间的拓扑等价应保持对应轨线的 α 与 ω 极限集我们必须强加某些特殊条件到这些极限集上.

例 2. 考虑由环面 T^2 上无理流所导出的向量场 X，X 的任一轨线的 α 与 ω 极限集为整个环面 T^2，特别地，X 没有奇点与闭轨，因此 X 是 Kupka–Smale 向量场. 可是 X 不是结构稳定的，因为它可以用导出有理流的向量场 Y 去逼近(参看第一章第 4 节)，Y 的一切轨线是闭的，这样它的 α 与 ω 极限集发生了根本的变化.

在定义 Morse–Smale 向量场的集合之前，我们需要一些新的概念与符号.

设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，考虑集合 $L_\alpha(X)=\{p\in M;\ p\in\alpha(q)$，对于某个 $q\in M\}$ 以及 $L_\omega(X)=\{p\in M;\ p\in\omega(q)$，对于某个 $q\in M\}$. 这些集合在由 X 生成的流下不变，且过任一点的轨线在 L_α 中

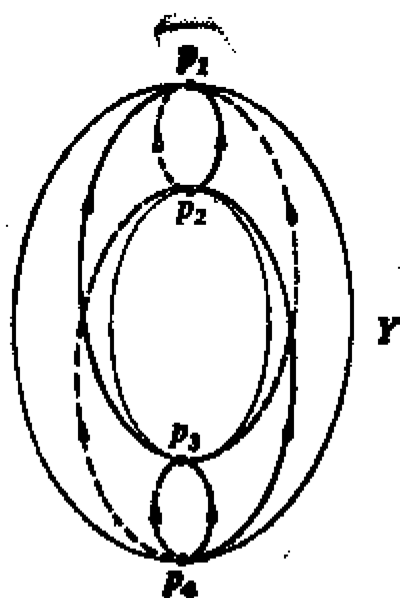


图 2

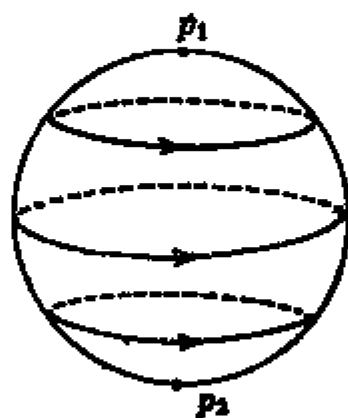


图 3

“出生”，在 L_ω 中“消亡”.

定义. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$，我们称 $p\in M$ 是 X 的游荡点，若存在 p 的邻域 V 以及数 $t_0>0$，使得对于 $|t|>t_0$，有 $X_t(V)\cap V=\varnothing$. 否则称 p 是非游荡的.

我们记 $\Omega(X)$ 为 X 的所有非游荡点的集合，由定义立即可得如下性质：

(a) $\Omega(X)$ 是紧的，在流 X_t 下是不变的；

(b) $\Omega(X)\supset L_\alpha(X)\cup L_\omega(X)$，特别地，$\Omega(X)$ 包含 X 的临界元素；

(c) 若 $X, Y\in\mathscr{X}^r(M)$ 以及 $h: M\to M$ 是 X 与 Y 间的拓扑等价，则 $h(\Omega(X))=\Omega(Y)$.

下面的例子说明，一般说来，Ω 包含 $L_\alpha\cup L_\omega$，作为 Ω 的真子集.

例 3. 考虑 S^2 上的 C^∞ 向量场 X，它具有两个奇点 p_1 与 p_2，其它轨线都是闭的，见图 3. 我们用非负的 C^∞ 函数 φ: $S^2\to\mathbb{R}$ 乘向量场 X，这里 φ 仅在不同于 p_1 与 p_2 的点 p 为零. 设 $Y=\varphi X$ 向量场 Y 是 C^∞，有三个奇点 p, p_1, p_2，且除满足 $\alpha(\gamma)=\omega(\gamma)=p$ 的轨线 γ 外，一切其它轨线都是闭轨，γ 上任何点 x 不属于 $L_\alpha\cup L_\omega$，但 γ 是由 Y 的闭轨凝聚的，因而 $x\in\Omega$. 见图 4.

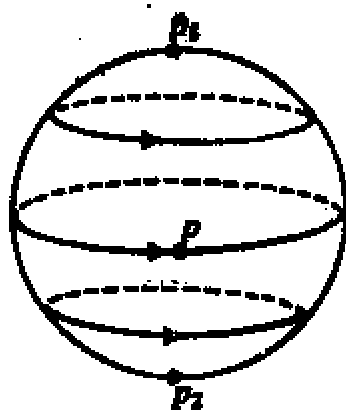


图 4

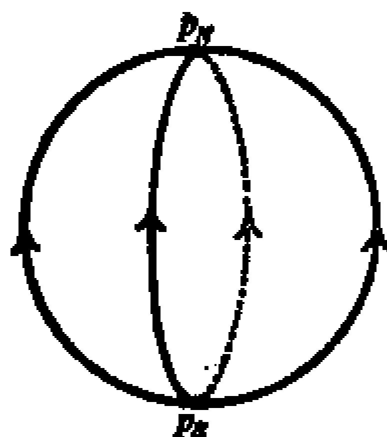


图 5

定义. 设M是n维紧流形, $X\in\mathscr{X}^r(M)$, 我们称 X 是Morse-Smale 向量场, 只要:

(1) X 有有限个临界元(奇点与闭轨), 它们都是双曲的;

(2) 若σ_1与σ_2是 X 的临界元, 则$W^s(\sigma_1)$与$W^u(\sigma_2)$是匀断相交的;

(3) $\Omega(X)$ 等于 X 的临界元的并集.

下面我们给出 Morse-Smale 向量场的一些例子, 例 4, 5, 6, 7 定义在S^2上, 例 8, 9 定义在环面T^2上. 临界元称为吸引子或排斥子, 只要对应于它的指标分别是最大或零. 否则称它为鞍.

例 4. S^2上具有如下特征的向量场称为北极-南极场:

p_N, p_S是双曲的;

p_N是吸引子;

p_S是排斥子;

若 $x\in S^2-\{p_N, p_S\}$, 则$\omega(x)=p_N$, 且$\alpha(x)=p_S$.

例 5. p_N, p_S是双曲排斥奇点, γ是双曲吸引闭轨, 若$x\in S^2-\{p_N, p_S\}-\gamma$, 则$\omega(x)=\gamma$及$\alpha(x)=p_N$或$p_S$.

例 6. p_1, p_2是双曲吸引子, r_1, r_2是双曲排斥子, s_1, s_2是双曲鞍点及$\Omega(X)=\{p_1, p_2, r_1, r_2, s_1, s_2\}$.

例 7. r_1, r_2, r_3是双曲排斥子, s是双曲鞍点, γ_1, γ_2是双曲吸引闭轨及$\Omega(X)=\{r_1, r_2, r_3, s\}\cup\gamma_1\cup\gamma_2$.

这个向量场在γ_1, γ_2所界的柱面上的轨线如图 9 所示.

例 8. p是双曲吸引的, r是双曲排斥的, s_1, s_2是双曲鞍点及

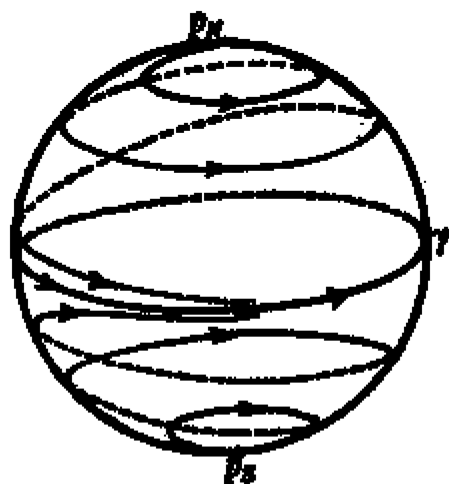


图 6

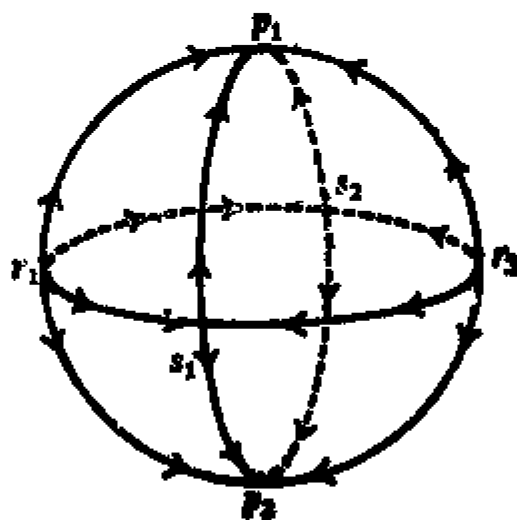


图 7

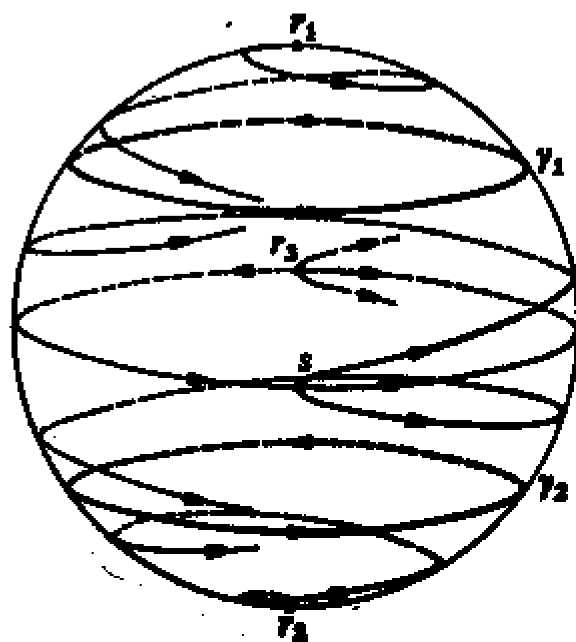


图 8

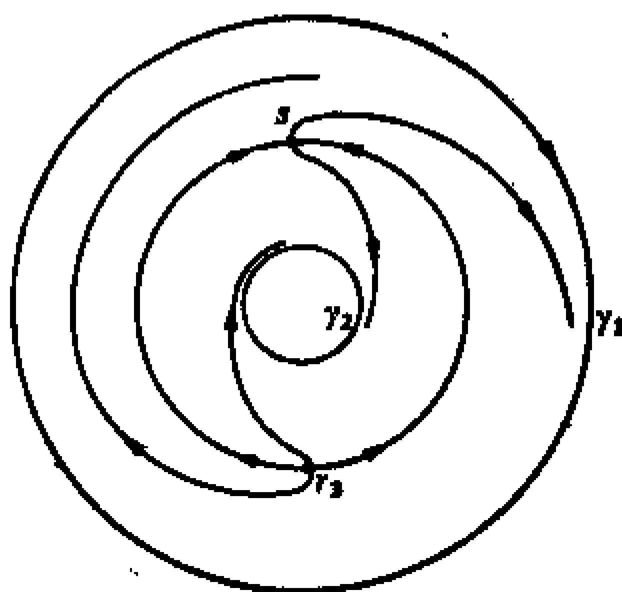


图 9

$\Omega(X)=\{p, r, s_1, s_2\}$. 见图 10.

例 9. γ_1 是吸引的双曲闭轨，γ_2 是排斥的双曲闭轨，$\Omega(X)=\gamma_1\cup\gamma_2$. 见图 11.

我们用 M-S 表示 Morse-Smale 向量场集合. 下述命题给出二维流形上 Morse-Smale 场的较为简单的特征. 一条鞍点联结是指一条轨线它的 α 与 ω 极限集都是鞍点.

1.1 命题. 设 M 是二维紧流形，向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 是Morse-Smale 向量场当且仅当

(a) X 有有限个临界元它们都是双曲的；

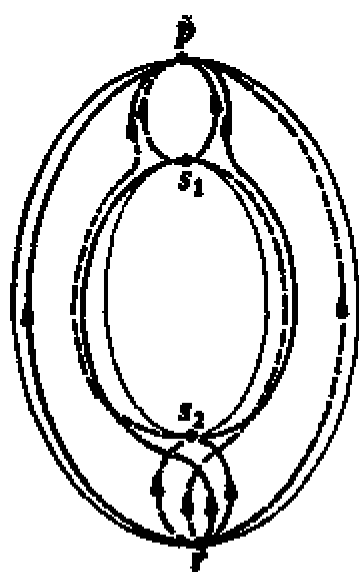


图 10

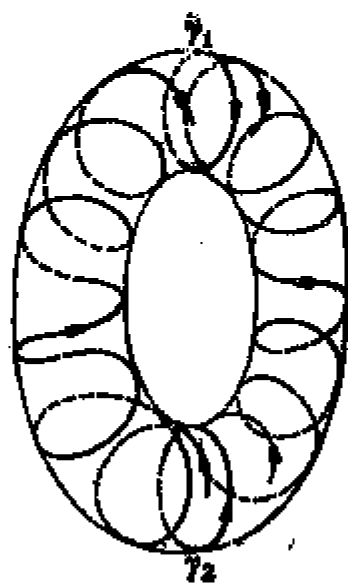


图 11

(b) 不存在任何鞍点联结；且

(c) 每条轨线有唯一的临界元作为它的 α-极限集以及有唯一的临界元作为它的 ω-极限集.

证明. 显然，若 $X\in$M-S，那末 X 满足上述条件(a)，(b)与(c). 让我们来证明它的逆命题，取 $X\in\mathscr{X}^r(M)$满足(a)，(b)与(c). 因为渊的稳定流形与源的不稳定流形都是二维的，所以匀断条件仅可能在鞍点的稳定与不稳定流形被破坏，然而由于向量场不存在鞍点联结，所以这是不可能发生的，因而我们仅需证 $\Omega(X)$ 由临界元组成即可.

首先我们来证明渊的稳定流形除它自身外是由游荡点组成的. 假设渊是奇点 p. 我们已经知道存在包含 p 的圆盘 $D\subset W^s(p)$，其边界是与 X 匀断相交的圆 C. 因为 $W^s(p)-\{p\}=\bigcup_{t\in\mathbb{R}}X_t(C)$ 且游荡集是不变的，所以仅需证 C 上的点是游荡点即可. 考虑圆盘 $D_1=X_1(D)$ 包含在 D 的内部，且 $D_{-1}=X_{-1}(D)$ 的内部包含 D. 取 $x\in C$，设 V 是 x 的与 D_1 以及 $M-D_{-1}$ 都不交的邻域，于是，对于 $|t|>2$，有 $X_t(V)\cap V=\varnothing$. 这就证明了 x 是游荡的. 现在假定渊是闭轨 γ，此时亦存在 γ 的邻域 U，U 的边界 S 是与 X 匀断相交的. 若 γ 是一条可定向的曲线，那末 U 同胚于圆环，且 S 是两条互不相交的圆. 若 γ 是不可定向的，那末 U 与 Möbius 带同胚且 S 是一个圆. 并且 $W^s(\gamma)-\gamma=$

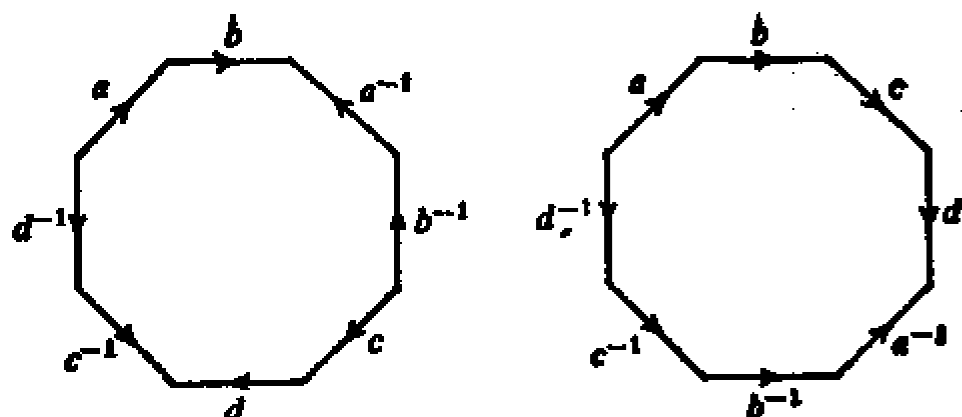


图 12

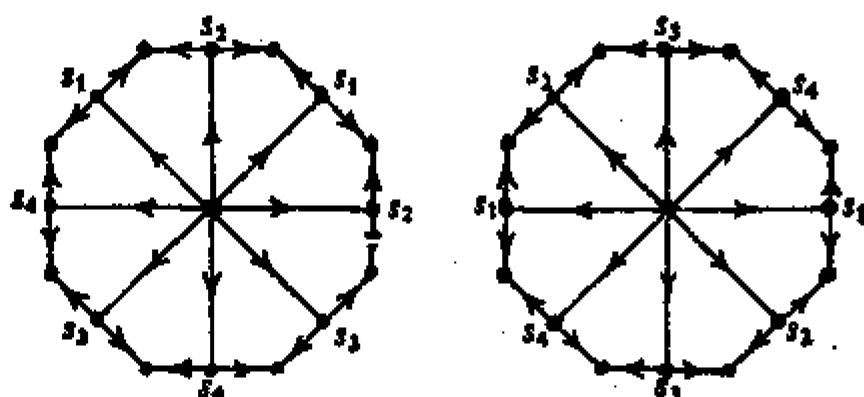


图 13

$\bigcup_{t\in R}X_t(S)$. 类似于前面 O, 可证 S, 因而 $W^s(\gamma)-\gamma$ 亦由游荡点组成. 当 σ 是排斥的临界元时, 可用完全相似的方式证明 $W^u(\sigma)-\sigma$ 是由游荡点组成的. 最后, 若 $x\in M$ 不是奇点并且也不属于闭轨, 则因为不存在鞍点联接轨线, 所以 $\omega(x)$ 与 $\alpha(x)$ 中定有一个是排斥的, 由上面证明知 x 是游荡的. 证毕. □

例 10. 在双环面上的极场

我们举出一些在双环面上的极 Morse-Smale 向量场的例子, 即向量场没有闭轨, 有且仅有一个源点与一个渊点, 这里双环面(或有"两个洞的环面"或有两个环柄的球面)能用一个八角形来表示[59], 它的边用下面的方式成对的恒同起来:

(1) 恒同的两个边没有共同的顶点;

(2) 恒同的两个边的微分同胚逆转了定向;

(3) 所有顶点都恒同于一个点.

在图 12 中, 我们用两种方式表示.

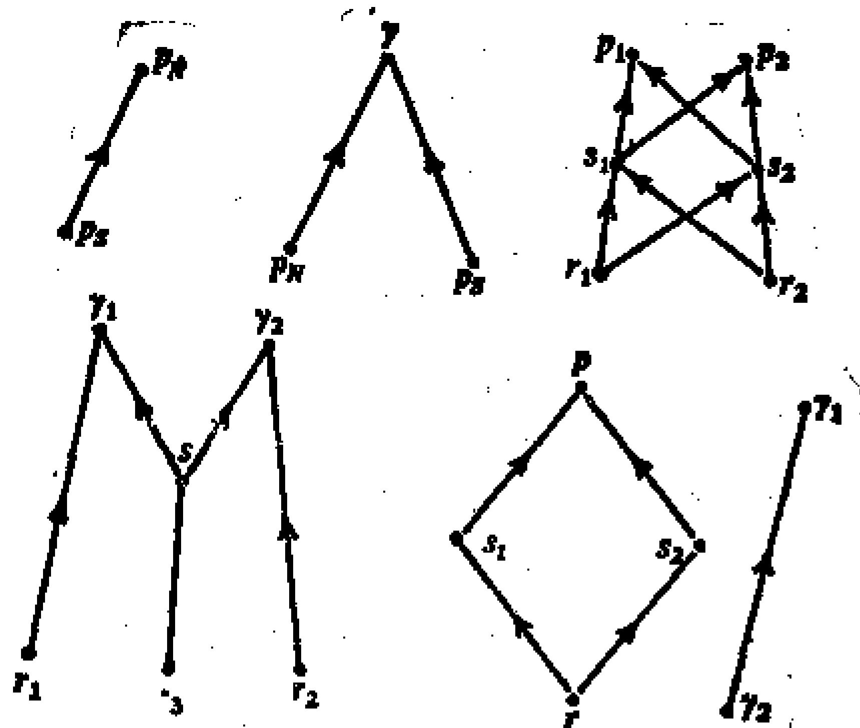


图 14

利用上述的双环面八角形表示，我们能构造一个极 Morse-Smale 场，具体作法如下：置一个源点在八角形的中心，每边的中点是一个鞍点，它的顶点是一个渊．在图 13 中，我们画出对应于上述表示的双环面上的 Morse-Smale 场的略图．反过来，设 X 是在双环面上的极 Morse-Smale 场，沿着鞍点的不稳定流形切割双环面，我们得到类似于上述的向量场表示．

类似的构造使我们能描述任意二维紧流形上的极 M-S 向量场．

定义．给定一个 Morse-Smale 场 X，我们定义 X 的相图 Γ 是 X 的临界元的集合，且具有如下的偏序：$\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$，$\sigma_1 \leqslant \sigma_2$，只要 $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \varnothing$，即存在一条从 σ_1 出发达到 σ_2 的轨线．

因为 Morse-Smale 场不存在鞍点联结，所以关系 $\leqslant$ 是偏序．我们指出，当 M 的维数 $=2$ 时，任何 Morse-Smale 向量场的相图的位级(levels)至多等于 3．

例．图 14 表示了这一节例 4—9 的相图．

定义. 设 X, $\tilde{X}\in$M-S 且设 Γ, $\tilde{\Gamma}$ 是它们的相图，我们称 Γ 与 $\tilde{\Gamma}$ 是同构的，只要存在一个一一对应 $h: \Gamma\to\tilde{\Gamma}$，使得

(a) $x\in\Gamma$ 是一奇点，当且仅当 $h(x)\in\tilde{\Gamma}$ 是奇点，

(b) 对于 x_1, $x_2\in\Gamma$, $x_1\leqslant x_2$ 当且仅当 $h(x_1)\leqslant h(x_2)$.

我们将证明，Morse-Smale 场在小扰动下仍得到 Morse-Smale 场且具有同构的相图。为此，我们要引入相伴于 Morse-Smale 场的滤子概念. 我们在[14]，[109]中可看到这个概念能够有效地应用于更一般的向量场.

定义. 设 $X\in$M-S，关于 X 的一个滤子是一个紧子流形 M_i $(0<i<k$，它们是带边的)的序列

$$M_0=\varnothing,\ M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_k=M,$$

使得

(a) X 与 M_i 的边界匀断相交且对于 $t>0$, $X_t(M_i)\subset M_i$ 的内域，

(b) 在 $M_{i+1}-M_i$ 中，流 X_t 的最大不变集恰是一个临界元 σ_{i+1}，即 $\bigcap_{t\in\mathbb{R}}X_t(M_{i+1}-\operatorname{int}M_i)=\sigma_{i+1}$.

1.2 引理. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$是 Morse-Smale 场，则 X 存在滤子.

证明. 设 σ_1, σ_2, $\cdots\sigma_j$ 是 X 的吸引子，与命题 1.1 的证明中一样，取互不相交的邻域 V_1, V_2, $\cdots$, V_j，它们的边界与 X 匀断相

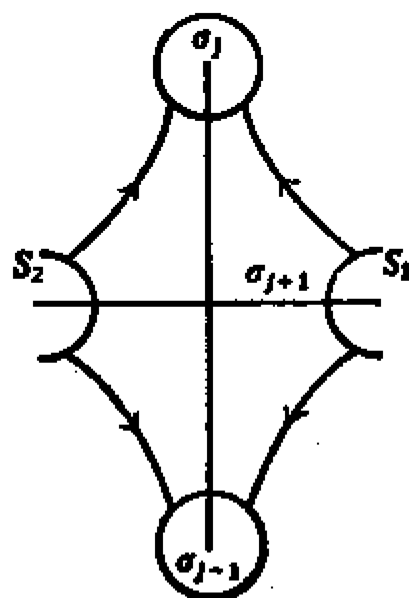


图 15

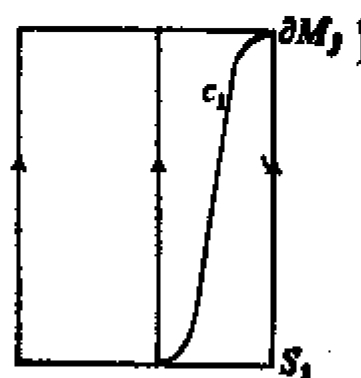


图 16

交。我们定义 $M_1=V_1$, $M_2=M_1\cup V_2$, $\cdots$, $M_j=M_{j-1}\cup V_j$.

设 σ_{j+1}, $\cdots$, σ_s 是 X 的鞍，考虑 σ_{j+1} 与 $W^u(\sigma_{j+1})-\sigma_{j+1}$ 的一个分支(它与 ∂M_j 匀断相交)，在 σ_{j+1} 的邻域中构造二个截面 S_1 与 S_2，它们与 $W^s(\sigma_{j+1})-\sigma_{j+1}$ 匀断相交，取这个邻域充分小，可使 X 过 S_1 与 S_2 端点的轨线与 ∂M_j 匀断切割. 在这些轨线孤段附近，构造曲线 c_1, c_2, c_3 与 c_4，它们连接 S_1 和 S_2 的端点到 ∂M_j 上，且与 X 匀断相交. 如图 16 所示，应用包含这些轨线孤段的流匣，我们能构造这些曲线与 S_1, S_2 以及 ∂M_j 相切.

设 V_{j+1} 是包含 σ_{j+1} 且边界由 S_1, S_2, c_1, c_2, c_3, c_4 与 ∂M_j 的一部分组成的区域，令 $M_{j+1}=M_j\cup V_{j+1}$. 易验证 $\bigcap_{t\in\mathbb{R}}X_t(V_{j+1})=\sigma_{j+1}$，且 M_{j+1} 满足所要求的条件. 对于每一个鞍点，重复上面的作法，于是得到子流形的序列 $\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_{j+1}\subset\cdots\subset M_s$. 最后，设 σ_{s+1}, $\cdots$, σ_k 是 X 的源. 与渊的情况相同，考虑这些源的邻域 V_{s+1}, V_{s+2}, $\cdots$, V_k，它们的边界与 X 匀断相交，于是定义

$$M_{s+1}=M-(\operatorname{int}V_{s+2}\cup\cdots\cup\operatorname{int}V_k),$$
$$M_{s+2}=M-(\operatorname{int}V_{s+3}\cup\cdots\cup\operatorname{int}V_k),$$

如此定义下去，直到 $M_k=M$ 为止. 易验证 $\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k$ 是 X 的滤子. □

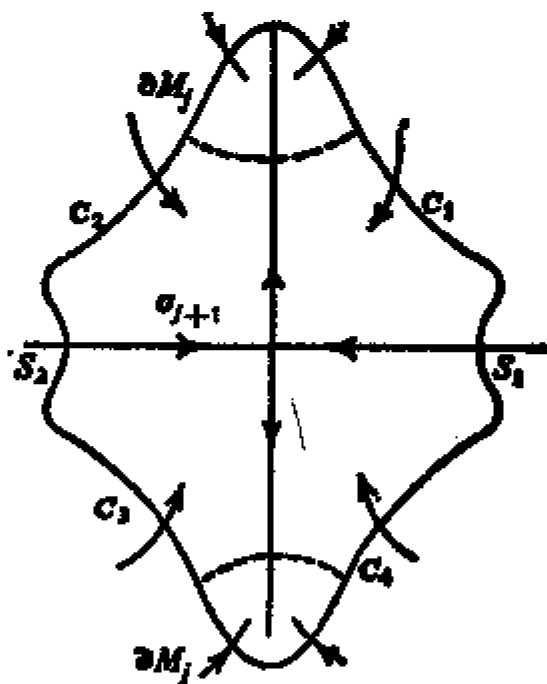


图 17

下面两个定理对于高维情况也成立[76],[79]. 对于比较简单的二维情况，我们把它们的证明作了改写.

1.3 定理. 设 $X\in$ M–S，则 X 在 $\mathscr{X}^r(M^2)$ 中存在一个邻域 $\mathscr{U}$，使得若 $Y\in\mathscr{U}$，有 $Y\in$ M–S，且它与 X 对应的相图是同构的.

证明. 因 X 的临界元是双曲的，于是对于每一 $\sigma_i\in\Omega(X)$ 存在 X 的邻域 $\mathscr{U}_i\subset\mathscr{X}^r(M^2)$ 及

σ_i 的邻域 U_i，使得任一 $Y\in\mathscr{U}_i$ 有唯一的临界元 $\sigma_i(Y)\subset U_i$．而且根据 Grobman-Hartman 定理，可假定 $\sigma_i(Y)$ 是流 Y_t 的整个含于 U_i的唯一的不变集，为此，必要时可缩小邻域 $\mathscr{U}_i$，U_i．令 $\mathscr{U}=\bigcap_i\mathscr{U}_i$，考虑 X 的滤子 $\varnothing=M_0\subset M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_k=M$．我们将证明，对于充分小的 $\mathscr{U}$，$\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$ 也是对应于任一 $Y\in\mathscr{U}$ 的滤子．由此便可推出 $\Omega(Y)$ 是由上面定义的临界元 $\sigma_i(Y)$组成的．事实上，因 X 与紧集 ∂M_i 是匀断相交的，因而邻近于 X 的 Y 也是如此．缩小 σ_i 的邻域 U_i，使得 $U_i\subset M_i-M_{i-1}$．因为 $\bigcap_{t\in R}X_t(M_i-\mathrm{int}M_{i-1})=\sigma_i$，所以存在 $T>0$，使得 $\bigcap_{t=-T}^{T}X_t(M_i-\mathrm{int}\,M_{i-1})\subset U_i$．当 $\mathscr{U}$ 充分小时，对于 $Y\in\mathscr{U}$，上述事实依然成立．因为 $\bigcap_{t\in R}Y_t(U_i)=\sigma_i(Y)$，所以 $\bigcap_{t\in R}Y_t(M_i-\mathrm{int}M_{i-1})=\sigma_i(Y)$．因此对于一切 $Y\in\mathscr{U}$，$\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$ 是它的滤子．我们要证 $\Omega(Y)\cap(M_i-\mathrm{int}M_{i-1})=\sigma_i(Y)$．事实上，过 $M_i-\mathrm{int}M_{i-1}$ 中不同于 $\sigma_i(Y)$ 的点的任意轨线 γ 必与 ∂M_i 或 ∂M_{i-1}（或同时）相交，这是因为仅有轨线 $\sigma_i(Y)$整个含于 $M_i-\mathrm{int}M_{i-1}$ 中，又因对于 $t>0$，有 $Y_t(M_{i-1})\subset M_{i-1}$ 及对于 $t<0$，有 $Y_t(M-M_i)\subset M-M_i$，γ 是游荡轨线，因而 $\sigma_i(Y)$ 是 $\Omega(Y)$ 在 $M_i-\mathrm{int}\,M_{i-1}$ 中仅有轨线，因此 $\Omega(Y)=\bigcup_i\sigma_i(Y)$，且对每个 i，$\sigma_i(Y)$是双曲的．

图　18

为了推证 $Y\in\mathscr{U}$ 是 Morse-Smale 场，只要证明对于充分小的 $\mathscr{U}$ 不存在鞍点联结就够了．为此，设 $\sigma_i=\sigma_i(X)$ 是一鞍点，且假定 $W^u(\sigma_i)-\sigma_i$ 的一个分支以渊 $\sigma=\sigma(X)$ 作为它的 ω 极限集．设 V 是在作滤子中的 σ 的邻域，因为 $W^u(\sigma_i(Y))$ 的紧致部分是邻近 $W^u(\sigma_i)$ 的，所以 $W^u(\sigma_i(Y))-\sigma_i(Y)$ 的一分支亦与 ∂V 匀断相交．于是它的 ω 极限集是 $\sigma(Y)$．同样的论证可应用到一切

鞍点的稳定与不稳定流形的分支上．因此对于充分小的 $\mathscr{U}$，若 $Y\in\mathscr{U}$ 那末 $Y\in$M-S 且上述对应 $\sigma_i(X)\to\sigma_i(Y)$ 是相图的同构。定理证毕．

1.4 定理． 若 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是 Morse-Smale 场，那末 X 是结构稳定的．

证明． 由上述定理得知，存在 X 的邻域 $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}^r(M^2)$，使得若 $Y\in\mathscr{U}$，那末 $Y\in$M-S 以及存在一个相图的同构 $\sigma_i(X)\to\sigma_i(Y)$．

第 1 部分．首先假定 X 没有闭轨．考虑 X 的渊点 σ 以及 $Y\in\mathscr{U}$ 的对应的渊点 $\sigma(Y)$．设 V 是上述的 $W^s(\sigma)$ 中包含 σ 的圆盘，即 ∂V 与 X 以及一切 $Y\in\mathscr{U}$ 匀断相交，且 $\sigma(Y)\in V\subset W^s(\sigma(Y))$．设 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ 是 X 的鞍点，使得 $\sigma_i\leqslant\sigma$．设 $p_1, p_2\cdots$ 是鞍点 σ_i 的不稳定分界线(即 $W^u(\sigma_i)-\sigma_i$ 的分支)与 ∂V 的交点．设 $p_1(Y), p_2(Y), \cdots$ 是 Y 的对应点．对于每一 σ_i，考虑截面 $S_i, \tilde{S}_i$．它们与 σ_i 的稳定分界线匀断相交于 $q_i, \tilde{q}_i$．如图 20 所示．

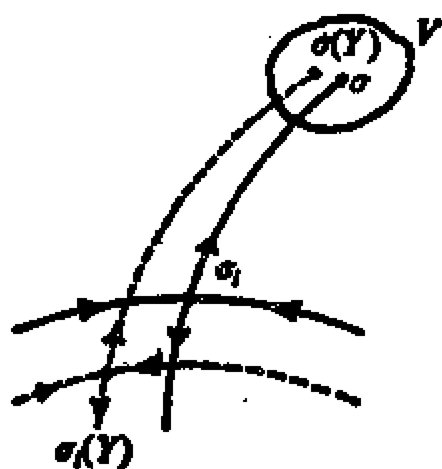


图 19

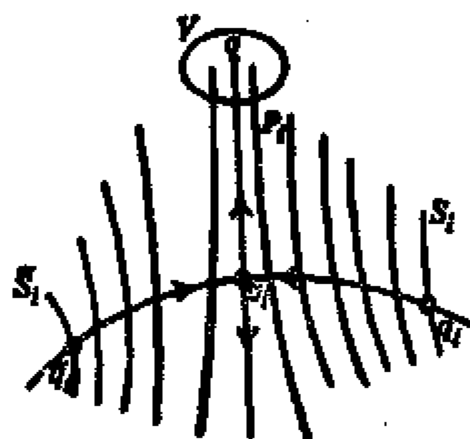


图 20

用统 X_t 穿透 $S_i, \tilde{S}_i$，得到在第二章第 7 节中所述的 $W^u(\sigma_i)$ 的管状族．这个族的纤维是 $X_t(S_i)$ 与 $X_t(\tilde{S}_i)$，$\forall t\in\mathbb{R}$，还有 $W^u(\sigma_i)$．把点 $f\cap W^s(\sigma_i)$ 投到每一纤维 f 上的投影 π_i 是连续的，而且 π_i 是从 p_i 在 ∂V 中的邻域 I_i 到 σ_i 在 $W^s(\sigma_i)$ 中邻域的同胚．对于场 Y 我们作相同的构造，现在我们来定义 X 与 Y 之间的拓扑等价．

令 $h(\sigma)=\sigma(Y)$, $h(\sigma_i)=\sigma_i(Y)$, $h(p_i)=p_i(Y)$, $h(q_i)=q_i(Y)$ 及 $h(\tilde{q}_i)=\tilde{q}_i(Y)$. 借助于 $hX_t(q_i)=Y_th(q_i)=Y_tq_i(Y)$, $hX_t(\tilde{q}_i)=Y_t\tilde{q}_i(Y)$ 扩充 h 到 $W^s(\sigma_i)$, 在 I_i 上定义 h 如下: 对于 $x\in I_i$, $hx=[\pi_i(Y)]^{-1}h\pi_ix$. 由此, h 在 ∂V 中的有有限个不相交的区间 I_i 上已被定义. 我们指出, 若 X 的邻域 $\mathscr{U}$ 充分小, 那末 $h|I_i$ 邻近于恒同, 因而能扩充 h 到整个圆 ∂V 上. 对于一切渊点重复进行上述构造. 最后, 利用方程 $hX_tz=Y_thz$, 在整个 M^2 上定义 h. 由上述构造易见 h 有逆 h^{-1}, h^{-1} 可完全象 h 一样定义只要互换作用即可.

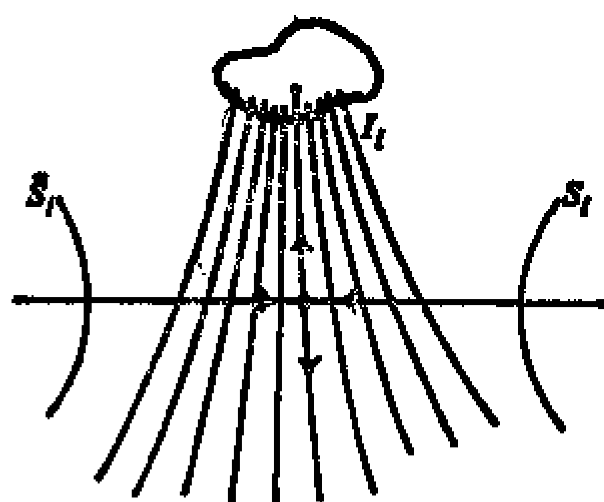


图 21

剩下来要证 h 的连续性. h 在渊点、源点以及在渊点的稳定流形上的连续性是显然的, 讨论它在鞍点的稳定流形上的情况. 取 $x\in W^s(\sigma_i)$, 这里 σ_i 是一鞍点, 回顾 h 把关于 σ_i 的管状族的纤维映到 $\sigma_i(Y)$ 的管状族的纤维上, 即 $\pi_i(Y)hz=h\pi_i(X)z$ 考虑任一序列 $x_n\to x$, 要证 $hx_n\to hx$. 由前面的论述知, 过 hx_n 的纤维收敛到过 hx 的纤维, 即 $\pi_i(Y)hx_n\to hx$. 剩下来要证 hx_n 收敛到 $W^s(\sigma_i(Y))$上. 为此我们来构造关于 $W^s(\sigma_i)$ 与 $W^s(\sigma_i(Y))$的管状族, 它们可由流 X_t 与 Y_t 浸润 ∂V 上的 I_i 与 $I_i(Y)$ 而得. 由于 $h(I_i)=I_i(Y)$, 可见 h 把 $W^s(\sigma_i)$的管状族的纤维映到 $W^s(\sigma_i(Y))$ 的管状族的纤维. 因此若 $\tilde{\pi}_i$ 与 $\tilde{\pi}_i(Y)$ 分别是 $W^u(\sigma_i)$ 与 $W^u(\sigma_i(Y))$ 上的投影, 那末 $h\tilde{\pi}_i(z)=\tilde{\pi}_i(Y)h(z)$. 因为 $\tilde{\pi}_i$ 连续, 且 $x_n\to x\in W^s(\sigma_i)$, 所以看出 $\tilde{\pi}_ix_n\to\tilde{\pi}_ix=\sigma_i$. 同样 h 在 $W^u(\sigma_i)$ 上的限制也是连续的, 于是 $h(\tilde{\pi}_ix_n)\to h(\sigma_i)=\sigma_i(Y)$.

另一方面, $h(\tilde{\pi}_i(x_n))=\tilde{\pi}_i(Y)h(x_n)$, 因而 $\tilde{\pi}_i(Y)h(x_n)\to\sigma_i(Y)$. 这就证明了 $h(x_n)$收敛到 $\sigma_i(Y)$的稳定流形上, 因而 $h(x_n)\to h(x)$, 于是在 X 没有闭轨的情况下, 定理得证.

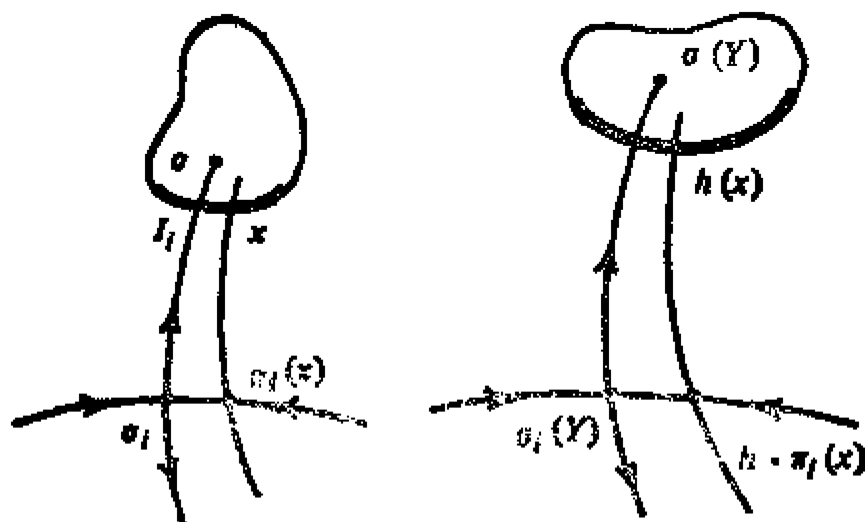


图 22

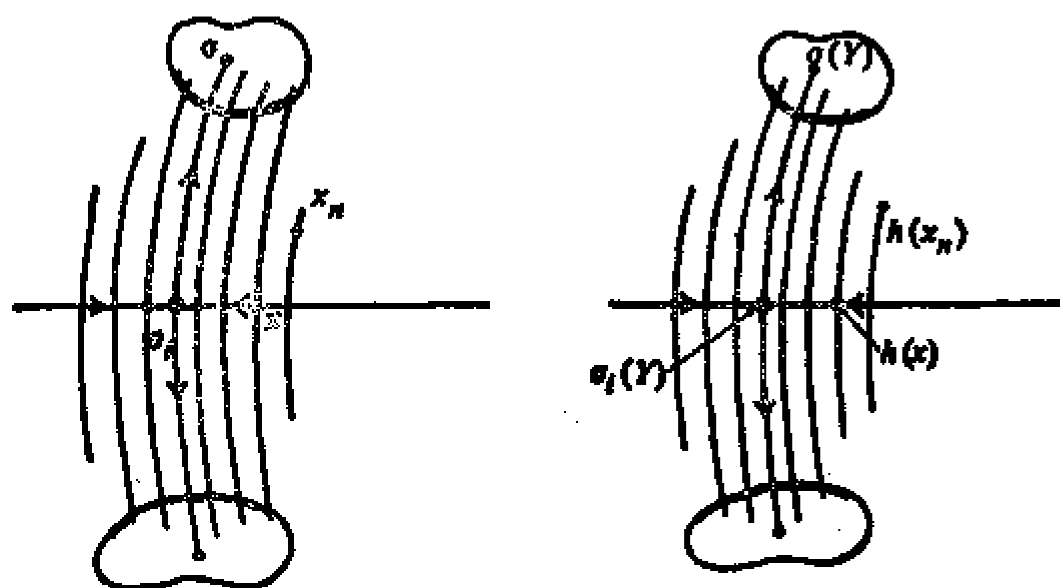


图 23

第 2 部分　假定 X 有闭轨．因为它们是双曲的且 M 的维数 $=2$，所以这些闭轨必是吸引的或排斥的．正如我们曾经指出的，存在场 Y 任意接近于 X，使得流 X_t 与 Y_t 不是拓扑共轭的，为了说明这点，只要用小扰动改变 X 的一个闭轨的周期即可．为了避开这个困难，我们去定义流 $\widetilde{X}_t$ 与 $\widetilde{Y}_t$ 之间的共轭 h，其中 $\widetilde{X}_t$ 与 $\widetilde{Y}_t$ 分别是 X_t 与 Y_t 的重新参数化，因为 X_t 与 $\widetilde{X}_t$ 的轨线是相同的，Y_t 与 $\widetilde{Y}_t$ 的轨线亦是相同的，所以 h 将是场 X 与 Y 之间的一个等价．

利用第三章引理 1.3，我们能从开始就合理地假定，X 与 Y 的闭轨都有相同的周期 τ 及允许不变的匀断的截痕．为了简化叙

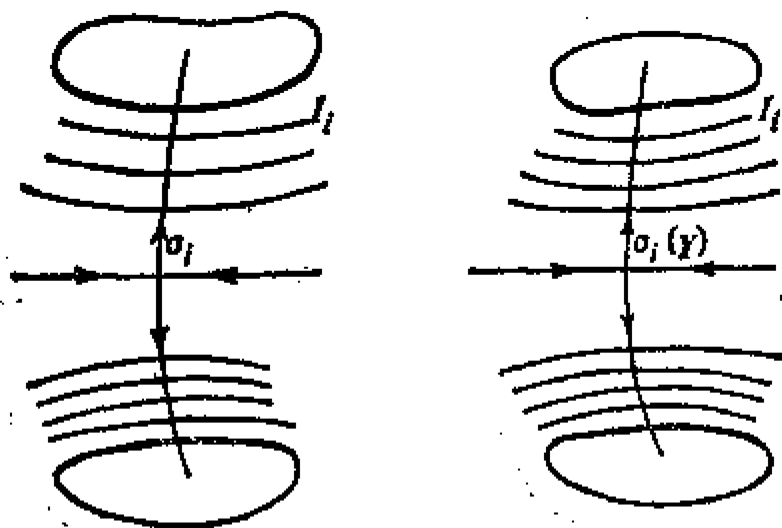


图 24

述，我们分两种情况讨论。

(2.a) 首先讨论所有闭轨都是吸引的情况。我们试图仿照前面没有闭轨的情况构造共轭。环绕着每个吸引的奇点 σ_i, $\sigma_i(Y)$，考虑与 X 和 Y 匀断相交的圆 C_i，对于每一闭轨 σ_j, $\sigma_j(Y)$ 取不变匀断截痕 Σ_j 以及在 Σ_j 中关于 Poincaré 映射的基本域 I_j, $I_j(Y)$。象上面一样构造关于 X 与 Y 的鞍点 σ_k, $\sigma_k(Y)$ 的不稳定管状族；取截痕 S_k 和 $\tilde{S}_k$ 分别与 $W^s(\sigma_k)$ 和 $W^s(\sigma_k(Y))$ 匀断相交；再应用族 $X_t(S_k)$, $X_t(\tilde{S}_k)$ 及 $Y_t(S_k)$, $Y_t(\tilde{S}_k)$。我们所要构造的同胚必须把 σ_k 的管状族的每一纤维映到 $\sigma_k(Y)$ 的管状族的一纤维，而且它必须保持匀断的圆 C_i 与匀断截痕 Σ_j。因此，根据对于每一鞍点 σ_k 在 $X/W^s(\sigma_k)$ 与 $Y|W^s(\sigma_k(Y))$ 之间的共轭的定义，我们在有限个 C_i 与 I_j 的子区间上引出同胚 h，这些子区间包含鞍点的不稳定流形与 C_i 和 I_j 的交集，只要 Y 充分邻近 X，这个同胚就充分邻近恒同，因而它能扩充到整个 C_i 和 I_j 上。对每一奇点 σ_i，我们定义 $h(\sigma_i)=\sigma_i(Y)$ 以及对每一闭轨 σ_j，定义 $h(\Sigma_j\cap\sigma_j)=\Sigma_j\cap\sigma_j(Y)$。最后利用共轭方程 $h=Y_t hX_{-t}$，类似于证明的第 1 部分，可把 h 扩充到整个 M^2。由此，h 是一一对应的且是满的。此外，可与第 1 部分一样去验证 h 在奇点以及在鞍点的稳定流形上的连续性，而 h 在闭轨上的连续性可由截痕 Σ_j 的不变性得到，正如我们在论述双曲闭轨的局部稳定性时所看到的(见

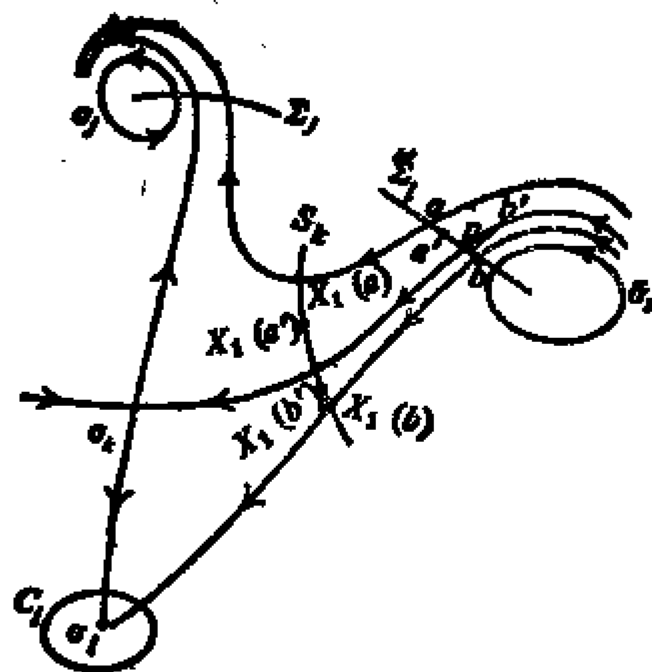


图 25

第三章第1节).

(2.b) 最后假定 X 有一吸引的闭轨和一排斥的闭轨. 在把场 X 与 Y 重新参数化后,这种情况将变成与前面类似的情况. 这种重新参数化是必要的, 它使我们有可能把在(2a)中构造的同胚扩充到排斥的闭轨. 为此取关于排斥闭轨 $\tilde{\sigma}_l$ 的匀断的不变的截痕 $\tilde{\Sigma}_l$. 设 $\tilde{I}_l$ 是对应的基本域, 每一 $\tilde{I}_l$ 分解为闭子区间的并集, 它们在 $\tilde{I}_l$ 内部的端点就是鞍点的稳定流形与 $\tilde{I}_l$ 内部的交集. 我们指出, 在每一个开子区间上的一切点将以相同的吸引子作为 ω 极限集, 如图 25 所示. 设 $p\in W^s(\sigma_k)\cap\tilde{I}_l$ 是这些子区间中的一个的端点, 考虑环绕着 p 的小区间 $[a, b]\subset\tilde{I}_l$, 使得过 $[a, b]$ 的每点的轨线与截痕 S_k 匀断相交, 利用第三章引理 1.3, 对 X 进行重新参数化, 使得 $[a, b]$ 上的一切点在相同时间 1 达到 S_k, 仍以 X 表示这个重新参数化的场, 设 $[a', b']\subset(a, b)$ 是包含 p 的区间. 根据新的参数化, 能保证 $[X_1(a), X_1(a')]\subset S_k$ 的一切点在时间 1 达到 Σ_j. 类似地能保证 $[X_1(b), X_1(b')]$ 上的一切点达到 C_i 的时间是相同的. 于是 $X_2[a, a']\subset\Sigma_j$ 及 $X_2[b, b']\subset C_i$. 我们对于那些对应的稳定流形与 $\tilde{I}_l$ 相交的鞍点重复地进行上述构造. 最后参数化 X, 使得在上述的区间 $[a, b]$ 的并集的 $\tilde{I}_l$ 的分支中, 一

切点在相同时间 $t=2$ 达到各种截痕 C_i 与 Σ_i.

我们对于充分邻近 X 的 Y 作相同的重新参数化，于是 X_t 与 Y_t 间的共轭 h 将被确切地构造出来，类似于带有额外的要求 $h(\Sigma_i\cap\tilde{\sigma}_i)=\tilde{\Sigma}_i\cap\tilde{\sigma}_i(Y)$ 的(2, 4). □

§2. 定向曲面上的 Morse–Smale 向量场的稠密性

在这节中，我们来证明，对于定向曲面 M^2, M-S 在 $\mathscr{X}(M^2)$ 中是稠密的，我们将应用 Kupka-Smale 定理来证明这个事实，Kupka-Smale 定理允许我们把 Peixoto 的原始证明作一些简化，但是必须指出，Peixoto 的工作是早的，而且它推动了这个定理的产生. 这一节的末尾，将分析 M^2 不可定向的情况以及讨论对于微分同胚的相应的结果.

我们首先着手于球面 S^2 上的稠密性定理的证明，它是十分简单的，而且对一般情况也是一个通俗的说明.

定义. 设 γ 是 $X\in\mathscr{X}^r(M)$ 的一条轨道，我们说 γ 是**回复的**[1]，只要 $\omega(\gamma)\supset\gamma$ 或 $\alpha(\gamma)\supset\gamma$.

X 的临界元素总是回复的，在这种情况下，我们说回复轨道是平凡的，环面上的无理流中的任一轨道都是回复的，且是非平凡的.

由 Poincaré–Bendixson 定理，向量场 $X\in\mathscr{X}^r(S^2)$ 中每条回复轨道都是平凡的，这个事实大大简化了 M–S 在 $\mathscr{X}^r(S^2)$ 中稠密性的证明.

2.1 定理. 设 $X\in\mathscr{X}^r(S^2)$ 是 Kupka-Smale 向量场，那末 X 是 Morse–Smale 向量场.

证明. 因为 X 是 Kupka–Smale 的，所以它仅有有限个奇点，且都是双曲的. 由 Poincaré–Bendixson 定理，任何轨道的 ω 与 α 极限集或是一个奇点或是一条闭轨. 这是因为若轨道 γ 的 ω 极限集包含更多的奇点，那末这些奇点必是鞍点，且 $\omega(\gamma)$ 一定包含联

1) 这里所说的回复，即通常所说的 Poisson 正(或负)稳定. ——译者注

结这些鞍点的正则轨道，但因为 X 是 Kupka-Smale 的，所以它没有鞍点联结，这就证明了上面的论断．因为 X 的闭轨是双曲吸引或排斥的，所以剩下只要让它只有有限条闭轨．假设不然，设 X 有无限多条闭轨，设 $x_1, x_2, x_n, \cdots$ 是这些不同轨道上点的序列，借助取子序列，我们不妨假定 x_n 收敛到某点 $x \in S^2$，显然，$\omega(x)$ 是鞍点，因为在吸引的奇点或闭轨的稳定流形中不可能存在闭轨．类似地，$\alpha(x)$ 是鞍点，于是 x 自身是鞍点，否则过 x 的轨道将是鞍点联结．另一方面，x 的不稳定的分界线的 ω-极限集是渊点，这是因为不存在鞍点联结．这又引出矛盾，因为通过邻近于 x 点的轨道，不在 x 的稳定的分界线之中，但它都以这些渊点之一作为 ω 极限．因此 x 不可能由闭轨凝聚而成，这就证明了定理． □

由于 Kupka-Smale 向量场是在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中稠的，我们有下面的推论．

推论． M-S 在 $\mathscr{X}^r(S^2)$ 中稠密． □

我们将用同样的方法去证明 M-S 在 $\mathscr{X}^r(M)$ 中稠密．但是由于非平凡回复轨道的存在，这个证明必须更细致．环面上无理流提供了非平凡回复轨道最简单的例子，我们建议读者试着证明生成无理流的向量场能被 Morse-Smale 向量场逼近．下面我们来讨论在其它的二维流形上具有非平凡回复轨道的向量场的例子．

例 11． 我们将给出在双环面(或带两个环柄的球面上)上具有非平凡回复轨道的例子．能够推扩下面的构造，给出在带有 $r(r>2)$ 个环柄的球面上具有非平凡回复轨道的向量场的例子．设 λ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是关于平面 $x_3=0$ 的反射，即 $\lambda(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, -x_3)$．考虑环面 T^2，它嵌在 $\mathbb{R}^3$ 中且使 $\lambda(T^2)=T^2$ 以及 $T^2 \cap \{x; x_3=0\}$ 是两个圆．

设 X 是在平面 $x_3=0$ 上度量的高度函数的梯度场，显然 X 是一对称向量场，即 $\lambda_* X = -X$．X 的奇点是源点 f，渊点 a 以及鞍点 s_1 和 s_2，如图 26．考虑一圆 $C_1 \subset T^2$，它正交于 X，界定一个圆盘 D_1 并包含渊点．设 $C_2=\lambda C_1$，于是 $D_2=\lambda(D_1)$ 是由 C_2 界定的

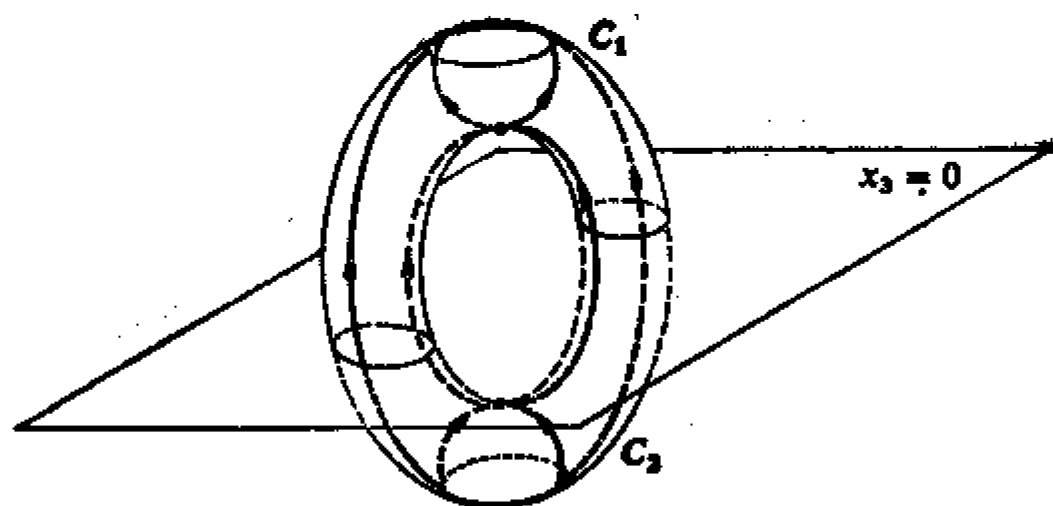


图 26

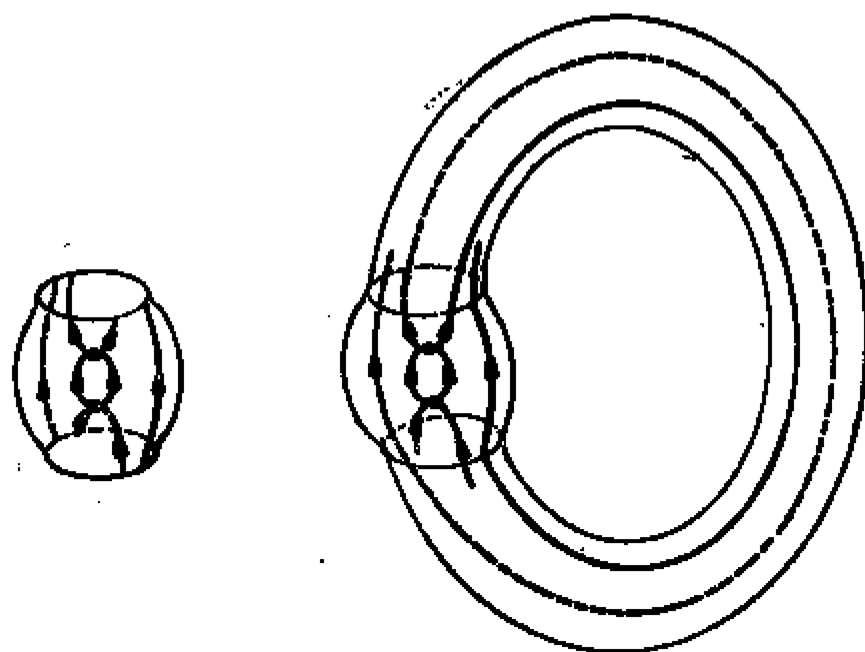


图 27

方形，由向量场的对称性，过任一点 $p\in C_2$（不在鞍点的分界线上）的轨道交 C_1 于点 $q=\lambda(p)$.

设 $h: C_1\to C_2$ 是微分同胚，由 $h=R_\alpha\circ\lambda$ 定义，这里 R_α 是 C_2 的无理旋转（即旋转数为无理数）. 在 $T^2-(D_1\cup D_2)$ 上考虑等价关系，按照 h，把 C_1 与 C_2 恒同起来. 设 M 是商流形，且 $P: T^2-(D_1\cup D_2)\to M$ 是标准投影. 设 $Y=P_*X$，显然，M 微分同胚于双环面，而且 Y 除了两个鞍点 s_1，s_2 以及 s_1 的不稳定分界线外，其它一切轨道都是稠密的. 事实上，其它一切轨道都与 $P(C_2)$ 相交，于是只要证明，每一轨道与 $P(C_2)$ 的交集在 $P(C_2)$ 中稠. 设 $p\in$

$P(C_2)$，取 $q\in C_2$ 使 $P(q)=p$，X 的过 q 的轨道交 C_1 于点 $\lambda(q)$，而这点与 $h\lambda(q)=R_\alpha(q)$ 恒同，于是过 p 的正向轨道与 $P(C_2)$ 第一次相交的交点为 $PR_\alpha(q)$．归纳地，我们看到过 p 的正向轨道与 $P(C_2)$ 第 n 次相交的交点为 $PR_\alpha^n(q)$．因 α 是无理数，$\{R_\alpha^n(q);n\in\mathbb{N}\}$ 在 C_2 中稠，这就证明了 p 的正向轨道是在 $P(C_2)$ 中稠，因而它在 Pretzel 中稠．

例 12．我们将在双环面上描述一 C^∞ 向量场 X，它具有如下性质：

(a) X 是 Kupka-Smale 场；

(b) X 仅有两个奇点，它们是鞍点；

(c) X 的每一正则轨道在双环面中稠．

我们将在这一节的引理 2.5 中证明，X 能够用有鞍点联结的向量场去逼近它(这个事实亦能直接被证实)．因此在双环面上 Kupka-Smale 向量场的集合是非开的．

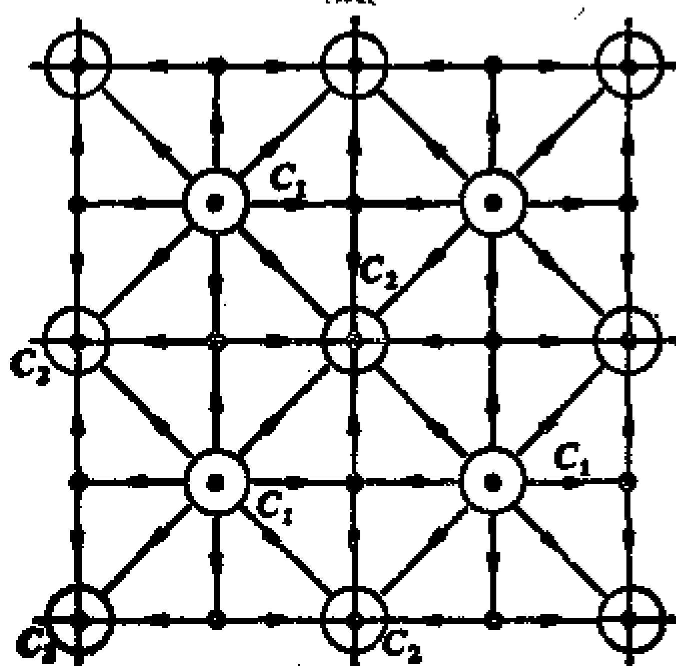


图 28

对于具有任何 $k\geqslant2$ 个环柄的球面，我们亦能得到类似的例子．我们从环面上的 Morse-Smale 向量场 Y 来着手构造 X，其中 Y 具有一个源点，一个洲点，两个鞍点．我们切开一个绕着渊点的圆盘和一个绕着源点的圆盘并借助适当的微分同胚去恒同这些圆盘的边界．这个作法等价于粘一个环柄到 T^2 上．设 π: $\mathbb{R}^2\to T^2$ 表示标准投影．我们首先来描述 $\mathbb{R}^2$ 上的一向量场 $\widetilde{Y}$，然后再讨论向量场 $Y=\pi_*\widetilde{Y}$．为了把 $\widetilde{Y}$ 投影成 T^2 上的向量场，取 $\widetilde{Y}(x)=\widetilde{Y}(y)$，若 $x, y\in\mathbb{R}^2$ 的坐标相差某个整数．因此只要描述 $\mathbb{R}^2$ 中带有顶点 $(0, 0)$，$(1, 0)$，$(1, 1)$ 以及 $(0, 1)$ 的正方形上的向

量场 $\tilde{Y}$ 即可. 设场 $\tilde{Y}$ 以点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为源点, 以原点为渊点, 以 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 为鞍点. 设 C_1 和 C_2 分别是绕源点与渊点的, 半径为 $\delta<\frac{1}{4}$ 的圆, 如图 28. 若 $\alpha\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)\subset C_1$, 那末过 α 的正向轨道交 C_2 于 $\varphi_1(\alpha)$. 于是, 我们有微分同胚 φ_1: $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)\subset C_1\to\left(-\pi, -\frac{1}{2}\pi\right)$. 类似地, 我们定义 φ_2: $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)\to\left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right)$, φ_3: $(\pi, 3\pi/2)\to(-2\pi, -3\pi/2)$ 以及 φ_4: $(3\pi/2, 2\pi)\to(-3\pi/2, -\pi)$. 根据所构造的向量场的对称性, 当 $i=1, 3$ 时, 有 $\varphi_i(\alpha)=-\alpha-\frac{1}{2}\pi$ 而当 $i=2, 4$ 时, 有 $\varphi_i(\alpha)=-\alpha+\frac{1}{2}\pi$.

设 φ: $C_1\to C_2$ 是微分同胚 $\varphi(\alpha)=-\alpha+\varepsilon$, 其中 ε/π 是无理数, 设 D_1 和 D_2 分别是边界为 C_1 和 C_2 的开圆盘. 我们应用微分同胚 φ 去恒同 C_1 与 C_2 得到双环面 T_2, 这里 C_1 和 C_2 组成了 $T^2-(D_1\cup D_2)$ 的边界. 设 X 是在 T_2 上由 Y 经过上面的恒同所诱导出的向量场, 即 $X=P_*Y$, 这里 P: $T^2-(D_1\cup D_2)\to T_2=T^2-(D_1\cup D_2)/N$ 是投影. 见图 29.

我们要证明 X 的每一正则轨道在双环面上稠. 在以下的论

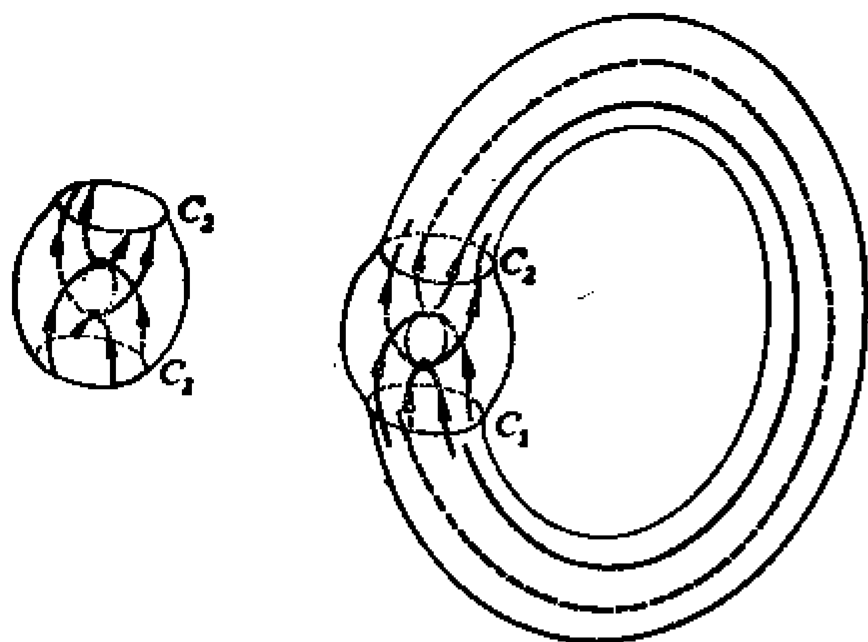


图 29

述中 O_1 既表示环面上的圆 O_1 也表示在双环面上的圆 $P(O_1)$. 由于每一条正则轨道与圆 O_1 相交，因此仅证正则轨道与 O_1 的交集在 O_1 上稠即可. 设 $D=\left\{i\left(\frac{\pi}{2}\right), i=0, 1, 2, 3\right\}$. X 过点 $\alpha\in O_1-D$ 的正向轨道将再与 O_1 相交，其第一个交点为 $\psi(\alpha)$，这里 $\psi: O_1\to O_2$ 是由

$$\psi(\alpha)=\begin{cases}\alpha+\varepsilon+\dfrac{\pi}{2}, \text{当 } \alpha\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)\text{时},\\ \alpha+\varepsilon-\dfrac{\pi}{2}, \text{当 } \alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)\cup\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\text{时}\end{cases}$$

定义的. 设 $\theta_+(\alpha)=\{\psi^m(\alpha), m\geqslant 0\}$ 是 α 的正向 ψ 轨道以及设 $\theta_-(\alpha)=\{\psi^m(\alpha), m\leqslant 0\}$ 是 α 的负向 ψ 轨道，若 $\theta_+(\alpha)\cap D\neq\varnothing$，则 α 属于 X 的鞍点的稳定流形，若 $(\theta_-(\alpha)-\alpha)\cap D\neq\varnothing$，则 α 属于不稳定流形中的一个. 若 $\theta_+(\alpha)\cap D=\varnothing$ 以及 $\theta_+(\alpha)$ 在 O_1 中稠时，那末 α 的正向 X 轨道是在 T_2 中稠的. 对于负向 ψ 和 X 轨道，可作类似讨论. 我们将证明一切正向(负向) ψ 轨道是稠的，于是对 X 轨道也同样正确，特别地 X 具有非平凡的回复轨道.

我们来证明正向 ψ 轨道在 O_1 中稠. 首先指出，ψ 是一一对应的、满的、仅在有限集 $D\subset O_1$ 上不连续的，它保持线段长度 (Lebesgue 测度)，即长度为 L 的区间的像是长度之和为 L 的有限个区间的和. 我们还断言，ψ 没有周期点，且 ψ 的每一条轨道交 D 至多一个点. 事实上，设 $x\in O_1(x\in D)$，且设 $m\neq 0$ 是使 $\psi^m(x)=x(\psi^m(x)\in D)$ 的一个整数，但 $\psi^m(x)=x+m\varepsilon+n_m\frac{\pi}{2}$，其中 n_m 是满足 $0\leqslant n_m\leqslant 3$ 的整数. 于是 $x+m\varepsilon+n_m\frac{\pi}{2}=x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (或 $x+m\varepsilon+n_m\frac{\pi}{2}=j\frac{\pi}{2}, j\in\mathbb{Z}$)，这是矛盾的，因为 ε/π 是无理数. 其次，我们仿效[45]中的想法去证明，若 ψ 是圆上具有上述性质的映射时，那末正向(负向) ψ 轨道是稠的，这是下面要证明的(1)与(2)的直接推论.

(1) 若 $F\subset O_1$ 是使 $\psi(F)=F$ 的有限个闭区间的和，那末 $F=O_1$. 假定 $F\neq O_1$，且设 $x\in O_1$ 是 F 的边界点，因为 $\psi(F)=F$ 以

及 ψ 在 C_1-D 上的限制是同胚，所以 $\psi^{-1}(x)$ 或为 F 的边界点或为 D 中元素．因为 F 仅有有限个边界点，且 ψ 没有周期点，所以存在正整数 k 使得 $\psi^{-k}(x)\in D$．类似地，要么 $\psi(x)$ 是 F 的边界点，要么 $x\in D$．于是存在一非负整数 j 使得 $\psi^j(x)\in D$．因此，我们有 $\psi^{k+j}(y)\in D$，这里 $y=\psi^{-k}(x)$，这与上面列举的 ψ 的性质之一矛盾．故 $F=C_1$．

(2) 若 $I\subset C_1$ 是闭区间，那末存在一个正整数 n，使得 $\bigcup\limits_{j=0}^{n}\psi^j(I)=C_1$．特别地，对于每一 $x\in C_1$，$\theta_+(x)$ 是稠的．$\theta_-(x)$ 是稠的证明完全类似．设 $B=(\partial I)\cup D$，此处 ∂I 是 I 的边界，对于每一 $x\in B$，令

$$\beta(x)=\begin{cases}+\infty, & \psi^n(x)\notin I-\partial I, \text{对一切 } n\geqslant 0;\\ \inf\{n\geqslant 0;\ \psi^n(x)\in I-\partial I\}, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

我们能够写 $I=\bigcup\limits_{j=1}^{n}I_j$，这里 I_j 是两两内部不相交的闭区间，且

$$\bigcup_{j=1}^{n}\partial I_j=(\partial I)\cup\{\psi^{\beta(x)}(x);\ x\in B,\ \beta(x)<\infty\}.$$

对于每一 j，设 $n_j=\inf\{n>0,\ \psi^{-n}I_j\cap I\neq\varnothing\}$，我们要证 n_j 是有限的．假设不然，那么对一切 $0\leqslant n\leqslant m$，有 $\psi^{-m}I_j\cap\psi^{-n}I_j=\varnothing$，因为否则有 $\psi^{-(m-n)}I_j\cap I_j\neq\varnothing$ 以及由于 $I_j\subset I$，我们将有 n_j 有限．但 $\psi^{-n}I_j$ 对 $n\geqslant 0$ 不可能都不相交，这是因为，这些集合（区间的有限和）中每一个的长度与 I_j 相同．我们推得 n_j 必是有限的．由论证的第一部分，我们亦可断言 $I_j,\ \psi^{-1}I_j,\ \cdots,\ \psi^{-(n_j-1)}I_j$ 是两两不相交的．最后，我们要证 $\psi^{-n_j}I_j\subset I$．否则，因 $\psi^{-n_j}I_j\cap I\neq\varnothing$，在 $\psi^{-n_j}I_j$ 内部存在一点 $x\in\partial I$．由 n_j 的定义，对 $0<i<n_j$ 有 $\psi^i(x)\notin I$，且 $\psi^{n_j}(x)$ 是在 $I_j\subset I$ 的内部．因为 $x\in B$，所以这蕴含 $n_j=\beta(x)$，这是矛盾的，因为 $\psi^{\beta(x)}(x)$ 将是某个 $I_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的边界点，因而它不属于 I_j 的内部．现令 $F=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\bigcup\limits_{k=0}^{n_j-1}\psi^{-k}I_j$．显然 $\psi^{-1}F\subset F$．因为 ψ^{-1} 保持区间的长度，所以 $\psi^{-1}F=F$．由(1)，我们有 $F=C_1$，(2)证毕．

我们建议读者去证明这个向量场 X 能被 Morse-Smale 向量场逼近.

例 13. 我们扼要地描述一个环面 T^2 上具有非平凡回复轨道与源点的 C^∞(甚至是解析的)向量场的例子,这是 Cherry 给出的,称为 Cherry 流. 这个向量场的构造是相当复杂的,它将在这一章末的附录中作出来. 我们将用对边恒同的平面上的正方形来表示环面. Cherry 场 X 有一个源点, f 以及一个鞍点 s,这个鞍点的非稳定分界线 γ_1 与 γ_2 是 ω 回复的. 实际上,γ_1 的 ω 极限集包含 γ_1 与 γ_2, 而且 X 没有周期轨道, 因此 X 是 Kupka-Smale 场. 正如我们将在这一节末尾看到的, X 能被具有鞍点联结的向量场逼近. 图 30 表示在 T^2 上的 Cherry 场.

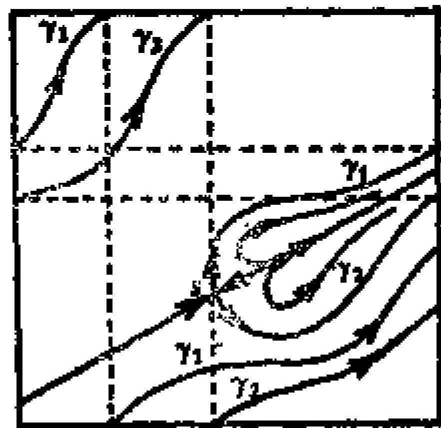


图 30

我们考虑与 X 匀断相交的圆 C, C 界定的圆盘 D 包含源点 f, 设 M 是紧致的二维流形, Y 是 M 上具有双曲吸引子的向量场. 设 $\tilde{D}$ 是包含 Y 的渊点的圆盘, 它的边界 $\tilde{C}$ 与 Y 匀断相交. 应用微分同胚 h: $C\to\tilde{C}$ 粘 T^2-D 到 $M-\tilde{D}$ 上, 我们得到流形 $\tilde{M}$. 应用 X, Y 以及上述的恒同,在 $\tilde{M}$ 上诱导出的向量场 $\tilde{X}$, 有非平凡的回复轨道. 利用这个方法我们能在除球面、投影平面、Klein 瓶以外的二维流形上构造具有非平凡回复轨道的向量场. 在球面、投影平面、Klein 瓶上一切回复轨道都是平凡的. 在球面以及投影平面上这个事实可用 Poincaré-Bendixson 定理证明. 在 Klein 瓶上[56]中有证明.

定义. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M)$. 我们说 $K\subset M$ 是关于 X 的**极小集**, 只要 K 是闭的、非空的且关于 X_t 是不变的, 而且不存在具有上述性质的 K 的真子集. 若 K 是 X 的临界元素, 我们说 K 是**平凡的极小集**.

我们指出,若 K 是极小的, γ 是包含在 K 中的轨道, 那末 γ

是回复的. 这是因为 $\omega(\gamma)$ 是闭的, 非空的和在 X_t 下不变的, 以及 $\omega(\gamma)\subset K$. 于是 $\omega(\gamma)=K\supset\gamma$, 类似地, $\alpha(\gamma)\supset\gamma$.

2.2 引理. 设 $F\subset M$ 是闭的、非空的且在 X_t 下不变的, 此处 $X\in\mathscr{X}^r(M)$, 那末存在极小集 $K\subset F$.

证明. 设 $\mathscr{F}$ 是 F 的在 X_t 下不变的闭子集的集合. 我们在 $\mathscr{F}$ 中考虑如下的偏序: 若 $A, B\in\mathscr{F}$, 且 $A\subset B$, 那末 $A\leqslant B$. 现设 $\{A_i\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的全序族, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, $\bigcap_i A_i$ 是非空的. 由于 $\bigcap_i A_i$ 是闭的和在 X_t 下不变的, 它属于 $\mathscr{F}$, 因而它是 $\{A_i\}$ 的下界. 根据 Zorn 引理[46], 在 $\mathscr{F}$ 中存在极小元素. □

我们必须指出关于极小集的下述重要事实, 虽然除了在附录中介绍了完整描述的 Cherry 流以外, 它在本书的正文中没有被用到. 在[16]中 Denjoy 指出了在环面 T^2 上具有不同于 T^2 的非平凡的极小集的 C^1 向量场, 另一方面, Denjoy[16] 与 Schwartz[100] 证明了在 M^2 上 C^2 向量场的极小集要么是平凡的, 要么是整个 M^2, 且在后一种情形中, M^2 一定是环面. 因此, 一条轨道的 ω-极限集要么包含奇点或闭轨, 要么是 T^2. 关于 Denjoy-Schwartz 定理的逆, 读者可参看[31].

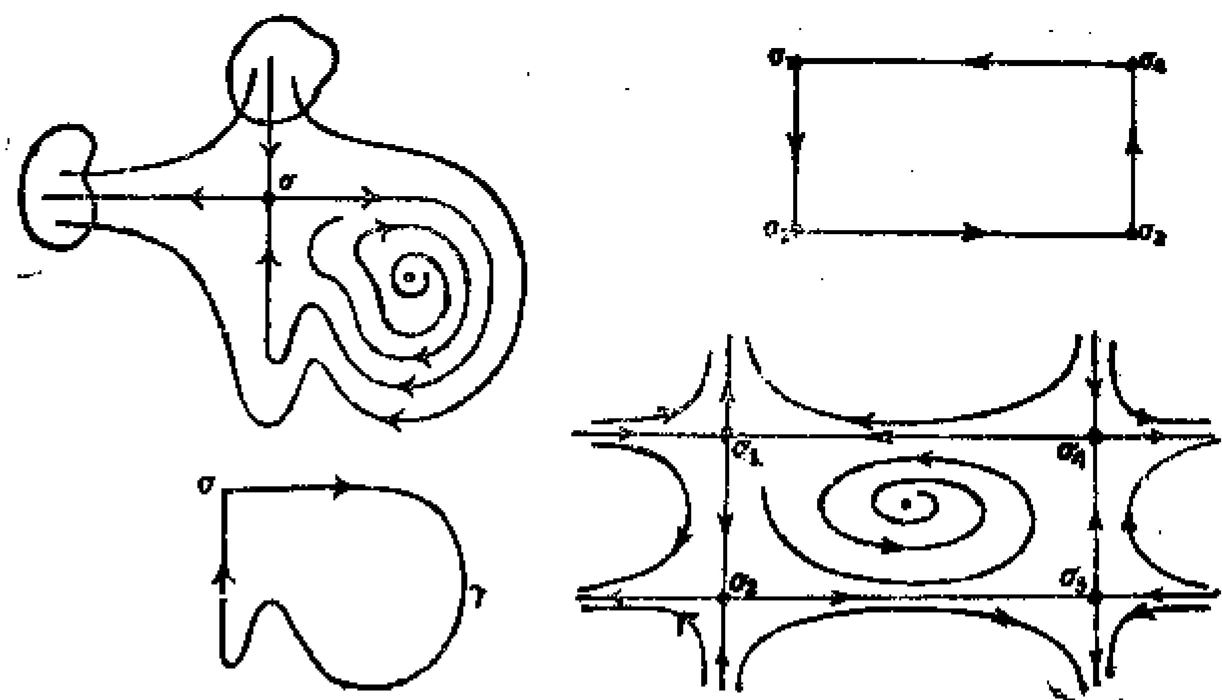


图 31

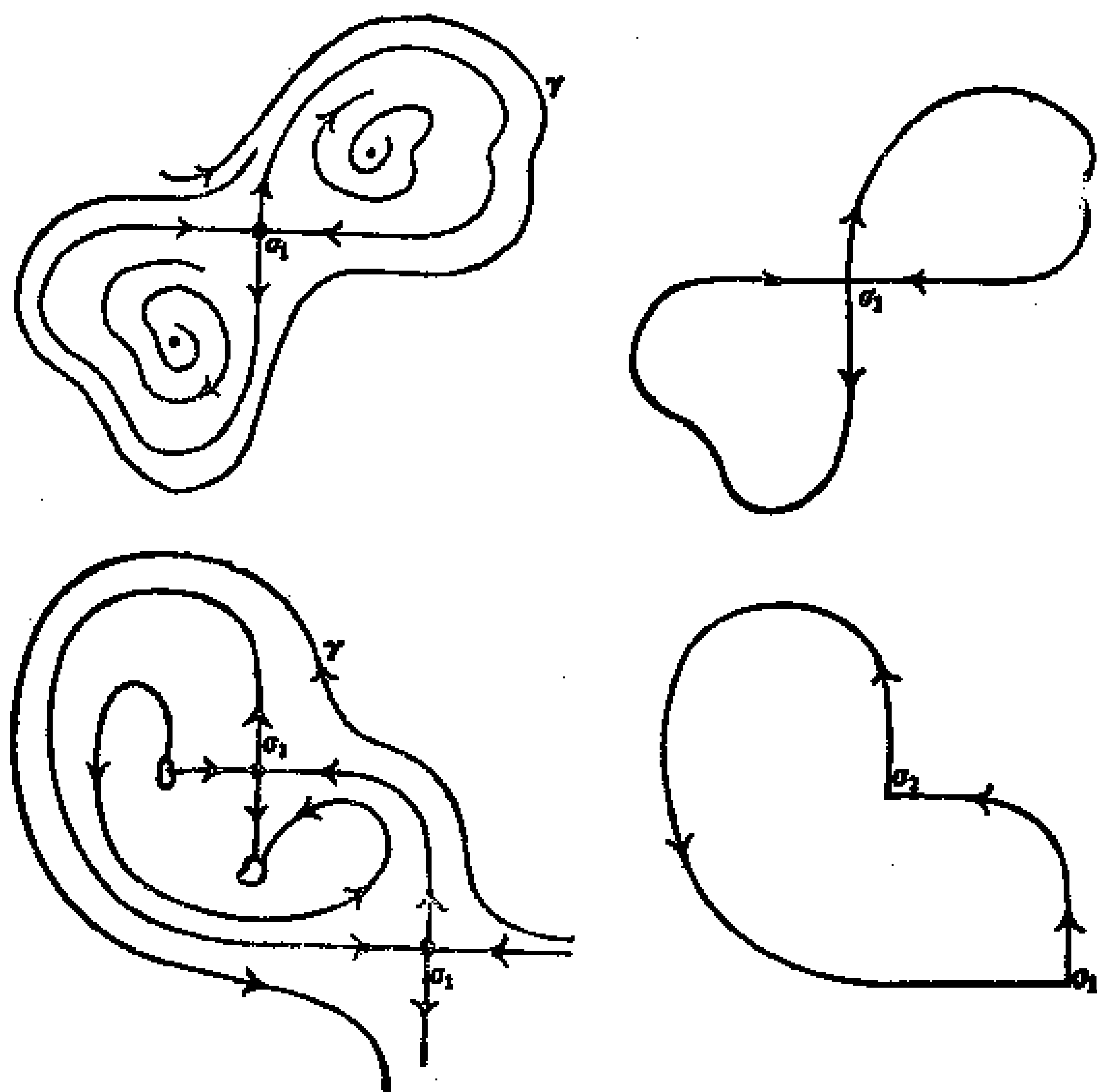


图 32

定义. 关于 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 的图是指 M 的连通的闭子集，它们是由鞍点与分界线组成的，且使：

(1) 图的每一分界线的 ω 极限集与 α 极限集是鞍点；

(2) 在图中每一鞍点至少有图中一条稳定与一条不稳定的分界线.

例. 图 31 和 32 对在 M^2 的一坐标卡上的向量场给出了图的四个例子.

2.3 命题. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是奇点均为双曲的向量场. 若 X 仅具有平凡回复轨道，那末任一轨道的 ω 极限集是临界元素或是一张图. 对于 α-极限集有类似结论.

证明. 选取 X 的任意轨道 γ，并且假定 $\omega(\gamma)$ 不是临界元素，显然 $\omega(\gamma)$ 不能包含吸引的奇点与闭轨，不然它将是这些临界元素之一. 另一方面，$\omega(\gamma)$ 必须包含鞍点. 这是因为在 $\omega(\gamma)$ 中极小集必须是临界元素，而且我们已经处理了 $\omega(\gamma)$ 是吸引奇点与闭轨的可能性. 于是 $\omega(\gamma)$ 包含鞍点，并且因为它不仅是一个奇点，所以它还包含鞍点的分界线. 显然，在 $\omega(\gamma)$ 中的分界线的数目是有限的.

首先我们假定 $\omega(\gamma)$ 中的每一分界线有唯一的鞍点作为它的 ω 极限集，我们要证明 $\omega(\gamma)$ 是一图. 我们断言存在包含在 $\omega(\gamma)$ 中的图. 事实上，设 $\sigma_1 \leqslant \omega(\gamma)$ 是鞍点且 γ_1 是包含在 $\omega(\gamma)$ 中的 σ_1 的不稳定分界线. 设 $\sigma_2 = \omega(\gamma_1)$ 且设 γ_2 是包含在 $\omega(\gamma)$ 中 σ_2 的不稳定的分界线，等等. 因 $\omega(\gamma)$ 仅有有限条分界线，这一过程将在 $\omega(\gamma)$ 中给出分界线的序列 $\gamma_i, \gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_t = \gamma_i$，使得 $\omega(\gamma_j) = \alpha(\gamma_{j+1})$，这就定义了一张图.

设 G 是 $\omega(\gamma)$ 中的极大图，即在 $\omega(\gamma)$ 中不存在任何包含 G 的图，我们断言 $\omega(\gamma) = G$. 否则，存在鞍点 $\tilde{\sigma}_1 \in G$ 以及 $\tilde{\sigma}_1$ 的不稳定的分界线 $\tilde{\gamma}_1$，它们不属于 G. 考虑鞍点 $\tilde{\sigma}_2 = \omega(\tilde{\gamma}_1)$ 以及 $\tilde{\sigma}_2$ 的分界线 $\tilde{\gamma}_2 \subset \omega(\gamma)$. 不断地进行这样的推证，我们得到序列 $\tilde{\sigma}_1, \cdots, \tilde{\sigma}_k$，使得对于某个 $j < k$，$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_j$ 或 $\tilde{\sigma}_k \in G$. 无论那一种情况，我们在 $\omega(\gamma)$ 中得到图 $\tilde{G}$，它真包含 G，即 $\tilde{G}$ 是 G 与鞍点 $\tilde{\sigma}_1, \cdots, \tilde{\sigma}_k$ 以及分界线 $\tilde{\gamma}_1, \cdots, \tilde{\gamma}_{k-1}$ 的并. 这与 G 是极大的图矛盾. 于是 $\omega(\gamma) = G$.

其次，我们假定存在分界线 $\tilde{\gamma}_1 \subset \omega(\gamma)$，其 ω 极限集不只是一个鞍点，于是 $\omega(\tilde{\gamma}_1) \subset \omega(\gamma)$ 且因为一切回复轨道都是平凡的，所以 $\omega(\tilde{\gamma}_1)$ 不包含 $\tilde{\gamma}_1$. 若 $\omega(\tilde{\gamma}_1)$ 仅包含唯一的鞍点作为 ω 极限集的分界线，那末根据上面的推证，$\omega(\tilde{\gamma}_1)$ 是图. 这个图亦是 γ 的 ω 极限集，而 $\omega(\gamma) \supset \tilde{\gamma}_1$，这是不可能的. 于是，必存在 $\tilde{\gamma}_2 \subset \omega(\tilde{\gamma}_1)$，它的极限集不只是唯一的奇点，且 $\omega(\tilde{\gamma}_2) \subset \omega(\tilde{\gamma}_1) \subset \omega(\gamma)$. 继续这样推证，我们将必定找到分界线 $\bar{\gamma} \subset \omega(\gamma)$，使得 $\omega(\bar{\gamma}) \supset \bar{\gamma}$，这是因为分界线的数目是有限的. 但是，由于不存在非平凡的回复轨道，这

是不可能的. □

推论. 若 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是 Kupka-Smale 场，并且它的一切回复轨道是平凡的，则 X 是 Morse-Smale 场.

证明. 根据上一命题，任何轨道的 ω 极限集是临界元素(它的 α 极限集亦同样)，这是因为不存在鞍点联结，因而不能有任何图. 剩下来要证，仅存在有限条的闭轨. 这由理 2.1 中对于 $M=S^2$ 情况的推证可以证明. □

我们现转到证明当 M^2 是定向的时候，任意 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 能被 Morse-Smale 向量场逼近. 为此，我们将提出一个邻近 X 的场 Y，具有如下的性质：存在 Y 的邻域 $\mathscr{U}\subset\mathscr{X}^r(M^2)$，使得任意 $Z\in\mathscr{U}$ 仅有平凡回复轨道. 于是，我们用 Kupka-Smale 场 $Z\in\mathscr{U}$ 逼近 Y. 根据上面的推论，Z 是 Morse-Smale 的.

我们要应用下面两个引理，它们的证明将在这一节末尾给出.

2.4 引理. 若 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是无奇点的向量场，那末 X 能被包含闭轨的向量场 Y 逼近.

2.5 引理. 假定 M^2 是定向的，若 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 有奇点，且所有奇点都是双曲的；又设 X 存在非平凡的回复轨道，那末 X 能被比 X 具有更多鞍点联结的向量场 Y 逼近.

2.6 定理. 对于可定向的 M^2，Morse-Smale 场是在 $\mathscr{X}^r(M^2)$ 中稠密的.

证明. 设 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$，必要时可借助于扰动 X，使得我们总能假定，X 仅有双曲奇点.

情况 1. X 没有奇点. 因为 M^2 是可定向的，所以它必须是环面 T^2.

由引理 2.4，X 能被具有闭轨的场 X_1 逼近，由第三章的引理 2.5，我们能用具有双曲闭轨 γ 的场 Y 逼近 X_1. 因为 Y 没有奇点，所以 γ 不包围 T^2 上的圆盘，因而，$T^2-\gamma$ 是一柱面，于是 Y 仅有平凡回复轨道. 因为邻近 Y 的每一场也有闭轨，所以这样的每一场具有同样的性质. 我们在 Y 附近取 Kupka-Smale 向量场 Z，根据命题 2.3 的推论，Z 是 Morse-Smale 向量场.

情况 2. X 有奇点，它们都是双曲的.

设 γ 是鞍点的不稳定的分界线，我们说 γ 是稳定化的，若 $\omega(\gamma)$ 是双曲吸引子(奇点或闭轨). 类似地，鞍点的稳定分界线是稳定化的，若它的 α 极限集是双曲排斥的.

(1) 若 X 的一切鞍点的分界线是稳定化的，那么 X 能被 Morse-Smale 向量场逼近.

事实上，存在 X 的邻域 $\mathscr{U}$，使得任意 $Y\in\mathscr{U}$ 的所有分界线都是稳定化的. 因此由引理 2.5，这些场仅有平凡的回复轨道. 现用 Kupka-Smale 向量场 $Y\in\mathscr{U}$ 去逼近 X，由命题 2.3 的推论，Y 是 Morse-Smale 的.

(2) 若 X 有非稳定化的分界线，那末 X 能被比 X 多一个稳定化的分界线的向量场 Y 逼近.

证明了这个断言，这个定理的证明也即将完成，这是因为仅存在有限多条分界线，经过一个一个地“稳定化”这些分界线，最后化归为情况(1).

设 $\mathscr{U}$ 是 X 的邻域，使得每一 $Y\in\mathscr{U}$ 的稳定化的分界线的数目不少于 X. 由引理 2.5，我们能用仅具有平凡回复轨道的 $Y\in\mathscr{U}$ 来逼近 X. 这是因为能被联结的鞍点仅存在有限个.

这里分四种可能去讨论:

(a) Y 没有鞍点联结. 设 γ 是关于 Y 的鞍点的非稳定化的分界线. (若不存在如此的 γ，Y 已经满足(1).)那末 $\omega(\gamma)$(或 $\alpha(\gamma)$)是非双曲闭轨. 我们用 $Z\in\mathscr{U}$ 来逼近 Y，这里 Z 使这一闭轨成为双曲的. 因而 Z 的对应 γ 的分界线稳定化了.

(b) Y 有一图，是某个轨道的 ω-极限集(或 α-极限集). 考虑图上的正则点 p 的匀断截痕 S. 因为存在轨道 γ，其 ω 极限集(或 α 极限集)包含 p，所以 γ 必交 S 于序列 $a_n\to p$. 对于充分大的 n，轨道 γ 在 a_n 与 a_{n+1} 之间的弧段 S 的线段(a_n, a_{n+1})以及图包围一个开域 $A\subset M^2$，A 同胚于一圆环. 设 F 是包含 p 的小流匣以及设 ΔY 是在 F 上的 C^r 小向量场，它在 F 的所有内点与 Y 匀断相交，而在 F 之外等于零，如图 33,

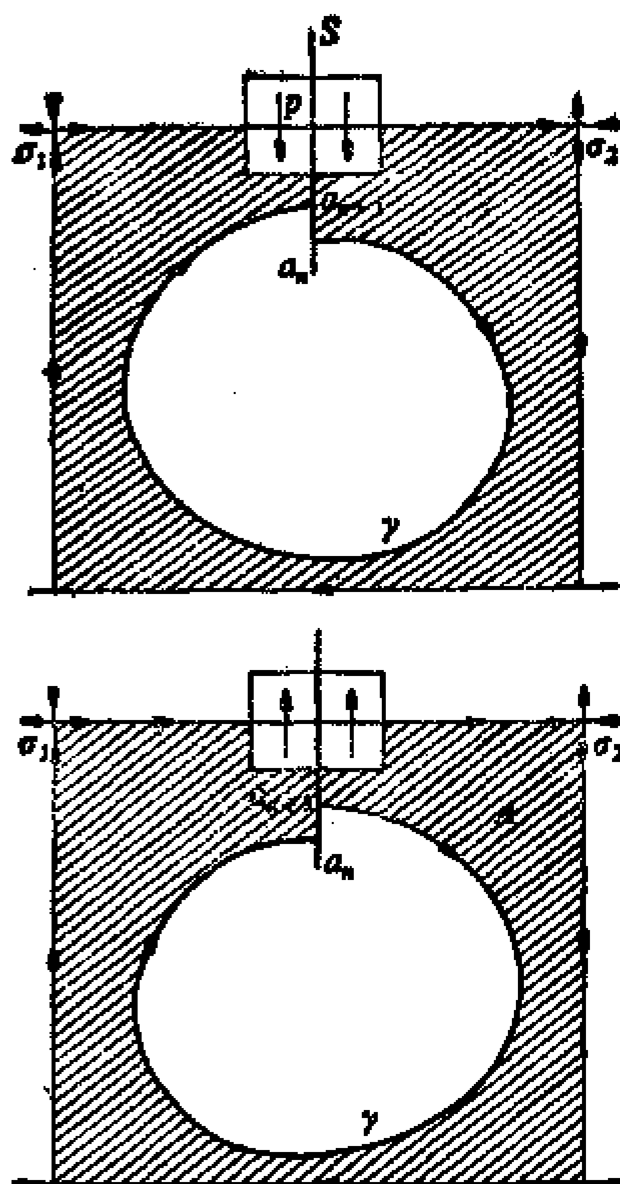


图 33

若 $Z=Y+\Delta Y$，那末当 $p\in\omega(\gamma)$ 时，对 $t\geqslant0$ 有 $Z_t(A)\subset A$，σ_1 的分界线(或在第二种情况中为 σ_2 的分界线)在扰动前包含在图中，在扰动以后便进入圆环. 于是这分界线的 ω 极限(或 α 极限)变成向量场 Z 的在圆环中的某个闭轨. 因为 Z 在 A 中没有奇点，所以这个事实可由 Poincaré-Bendixson 定理得到. 借助于向量场 Z 的进一步扰动，可使这个闭轨成为双曲的，利用这种方法，继续稳定化其它分界线. (若 $p\in\alpha(\gamma)$，我们对 $t\leqslant0$ 考虑 Z_t.)

(c) Y 有用闭轨凝聚成的图，如图 34.

由于图以及充分邻近于图的闭轨所包围的圆环 A，使情况(c)与情况(b)完全相似.

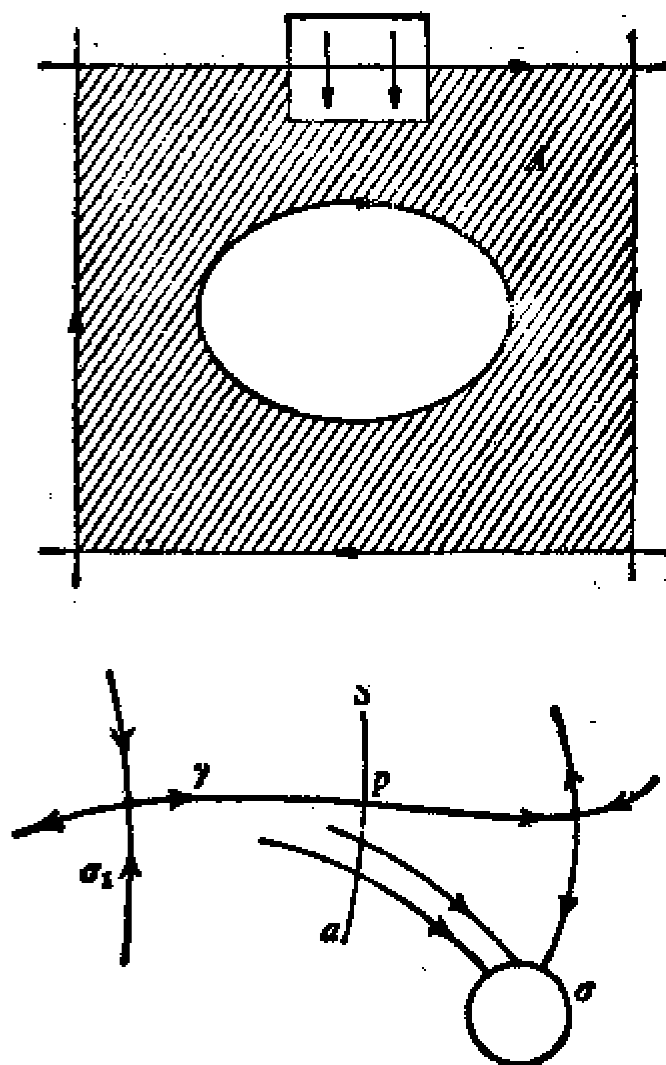


图 35

(d) 现在讨论最后一种可能性，设 γ 是鞍点联结且 S 是过点 $p\in\gamma$ 的匀断截痕，如图 35 所示.

我们考虑一个小开区间 $(a, p)\subset S$. (a, p) 的一切点都有相同的 ω 极限，它们是吸引奇点或闭轨. 我们指出，若对于充分小的 (a, p)，这种情况不发生，那末必为(b)或(c)所描述的情况. 事实上，若 Y 不归入情况(b)，那末 (a, p) 中每一点的 ω 极限是奇点或闭轨. 而且除 γ 外不存在鞍点的稳定分界线凝聚在 p 点，这是因为这样分界线的 α 极限集将包含 γ，从而我们将处于情况(b). 因此在 (a, p) 上每一点的 ω 极限是一吸引的奇点或一闭轨. 因为 p 不是闭轨凝聚的(否则它对应情况(c))，所以在 (a, p) 上一切点都有相同的 ω 极限，我们用 σ 来表示它.

做法同上，我们扰动向量场使 σ_1 的不稳定的分界线的 ω 极限

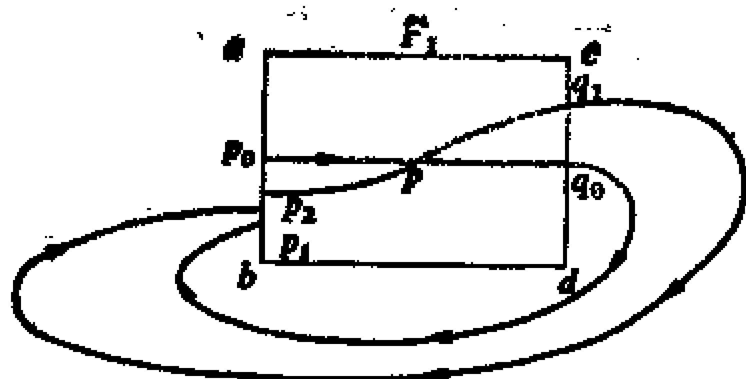


图 36

变为 σ，若 σ 是吸引的奇点，那么我们就多稳定化了一条分界线．若 σ 是闭轨，那么必要时我们可进一步扰动使它成为双曲的，于是也得到比原来向量场多一条稳定化的分界线．这就结束了这个定理的证明． □

在证明引理 2.4 与引理 2.5 之前，关于非平凡的回复轨道，我们将作一些说明．

设 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$，且设 γ 是非平凡的 ω 回复轨道．我们断言，过任一点 $p\in\gamma$，存在与 X 匀断相交的圆．

事实上，让我们考虑包含 p 的一流匣 F_1，设 ab 与 cd 表示 F_1 中与 X 匀断相交的边．因为 $p\in\omega(\gamma)$，所以 γ 无限多次与 ab 相交．设 p_1 是 γ 绕回与 ab 相交的第一个点．取包含轨道弧 q_0p_1 在内的流匣 F_2，我们假定在 ab 上 p_1 点在 p_0 点之下，见图 36．在其它情况下圆的构造也是类似的．若 M^2 是可定向的，则我们能在 F_2 中找到 X 的轨道弧，它从 cd 的位于 q_0 之上的点 q_1 出发与 ab 相交于 p_1 之上的点 p_2．在 F_2 中，我们能作弧 q_1p_3，其中 p_3 在 p_2 之上，但在 p_0 之下，弧 q_1p_3 是与 X 匀断相交的，且在终点有正的斜率，如图 37．现在我们在 F_1 中用联结 p_3 与 q_1，包含 p 且与 X 匀断相交的弧作成所要求的圆，这个弧必须与前面所得的弧在 p_3 与 q_1 点有相同的斜率．

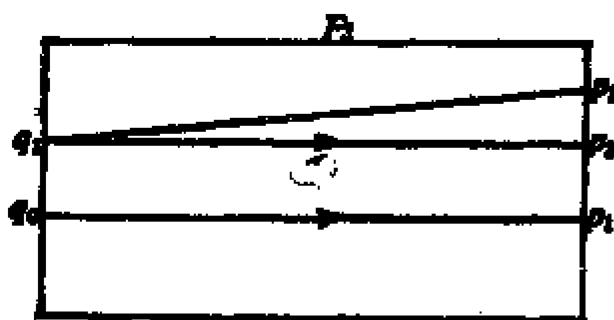


图 37

在 M^2 是不可定向的情况下，我们留给读者去构造上面所述的匀断相交的圆，在这种情况下，必须考虑 γ 与 ab 的依次相交的交点.

我们用 C 表示过 $p\in\gamma$ 与 X 匀断相交的圆. 设 $D\subset C$ 是由 C 上那些正向轨道回转来再与 C 相交的点组成的子集. 定义 Poincaré 映射 P: $D\to C$，这个映射把 D 上每点 x 映到 x 的正向轨道与 C 的第一个交点. 用管道流定理，D 是开的. 于是 $D=C$ 或 D 是 D 是开区间的并. 假定 $D\neq C$ 且设 (a_1, a_2) 是 D 中的最大区间，我们证明 $\omega(a_1)$ 是鞍点，且 $\omega(a_2)$ 亦是. 若 $\omega(a_1)$ 是一奇点，它必是鞍点，这是因为渊点也吸引 a_1 附近的轨道然而每一条从 (a_1, a_2) 出发的轨道要回转再与 C 相交. 因此只要证明 $\omega(a_1)$ 不包含正则点即可. 假设不然，设 x 是 $\omega(a_1)$ 中的正则点，S 是过 x 与 X 匀断相交的截痕. 由于 $x\in\omega(a_1)$，a_1 的正向轨道交 S 无穷多次. 另一方面，若 $q\in(a_1, a_2)$，则因为 S 与 X 匀断相交以及轨道弧 $qP(q)$ 是紧致的，所以 $qP(q)$ 与 S 相交的次数 N 是有限的. 由管道流定理，这个数 N 在 q 的邻域上是常数，又由于 (a_1, a_2) 是连通的，它在整个区间上也是常数. 将管道流定理应用于 a_1 的正向轨道切割 S $n>N$ 次的一弧，我们在 (a_1, a_2) 上找到一些点，它们的正向轨道在回转到 C 上之前相交 S 至少 n 次. 这是矛盾的. 这就证明了 $\omega(a_1)$ 必是鞍点. 类似地，可证 $\omega(a_1)$ 亦是鞍点.

于是 D 是 C 中开区间的有限和，这些区间的端点属于鞍点的稳定分界线. 若我们考虑 P 的逆映射 P^{-1}(关于 $-X$ 的 Poincaré 映射)，其定义域是开区间的有限和，区间的端点属于鞍点的不稳定的分界线.

我们要指出，若 Poincaré 映射是定义在整个圆 C 上，那末 M^2 是环面 T^2 或 Klein 瓶 K^2. 事实上，容易看出，由 C 浸润的集合，$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$ 是开的又是闭的，因而它与 M^2 相合. 因此，向量场 X 没有奇点，这就证明了我们叙述的事实. 我们有 $M^2=T^2$ 或 $M^2=K^2$，视 P 保持 C 的定向与否而定. 若 P: $C\to C$ 逆转定向，那末 P 有不动点. 这个不动点对应于 X 的一闭轨 γ，这一闭轨

不能包围在 K^2 中的一圆盘，于是 $K^2-\gamma$ 是 Möbius 带，这证明了 X 仅有平凡回复轨道.

引理 2.4 的证明. 若 X 有闭轨，引理自然成立. 若 X 没有闭轨，那末它有回复轨道 γ 且 $M^2=T^2$. 取 $p\in\gamma$，且设 C 是过 p 的匀断相交的圆. 令 $C_1=X_{-\delta}(C)$，$C_2=X_\delta(C)$，这里 $\delta>0$ 是充分小的，显然 C_1 与 C_2 是与 X 匀断相交的. 考虑包含 p 的流匣 F，它的边位于 C_1 与 C_2 中，且与 X 匀断相交.

我们定义 P: $C_2\to C_1$，它把 C_2 的每一点 x 映到它的正向轨道与 C_1 的第一个交点. 如我们已经看到的，P 是合理定义的且是保持定向的. 所谓保持定向，是指对于给定的 C_2 的定向，映射 P 与 $X_{-2\delta}$: $C_2\to C_1$ 在 C_1 上导出同样的定向. 现设 $p_i=P^i(q_0)=P(q_{i-1})$，其中 $q_0=X_\delta(p)$. 存在序列 n_i 使得 $p_{n_i}\to p_0$，我们能假定每一 p_{n_i} 在 ab 上位于 p_0 之下. 见图 38.

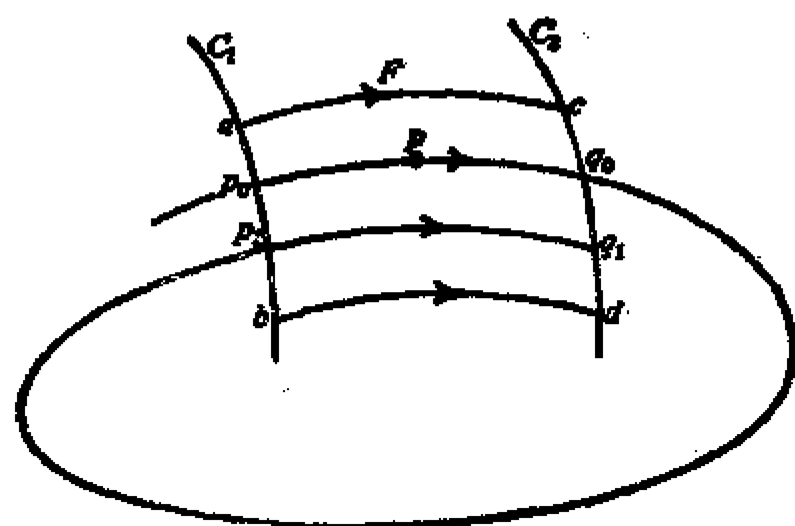


图 38

考虑一族向量场，$Z(u)=X+\varepsilon uY$，这里 $\varepsilon>0$，$0\leqslant u\leqslant1$，且 Y 在 F 内部与 X 匀断相交，其方向向上而在 F 之外为零，若 ε 是小的，那末 $Z(u)$ 对一切 $0\leqslant u\leqslant1$ 邻近于 X.

现在 ab 上固定一以 p_0 为内点的闭区间 I. 对于每点 $x\in I$，考虑 F 中 $x\in I$ 与过 x 的 $Z(1)$ 的正向轨道与 C_2 的交点间的垂直距离. 因为 I 是紧的，所以这个距离存在最小值 $\rho>0$. 我们断言，对某个 $0<u\leqslant1$，$Z(u)$ 的过 q_0 的轨道是闭的. 事实上，因为

对任何 u 在 F 之外都有 $Z(u)=X$，所以我们能定义，$p_k(u)=P(q_{k-1}(u))$，这里 $k\geqslant 1$，$q_0(u)=q_0$ 且 $q_{k-1}(u)$ 是 $p_{k-1}(u)\in C_1$ 的正向轨道第一次与 C_2 的交点.

固定一数 i，使得 $p_i=P^i(q_0)$ 在 p_0 之下，且到 p_0 的距离小于 ρ.

我们指出，$p_i(u)$ 与 $q_i(u)$ 连续依赖于 u，对于充分小的 u，$p_i(u)$ 是在 I 之中且在 p_0 之下，它的高度随 u 增加．同样地，$q_i(u)$ 是在 q_0 之下，它的高度随 u 增加．于是，要么 $p_i(u_0)=p_0$，对于某个 $u_0\in(0, 1]$，要么对于一切 $u\in(0, 1]$ $p_i(u)\in I$．在第一种情况下，$q_i(u_0)$ 是在 q_0 之上，于是存在 $u_1<u_0$，使得 $q_i(u_1)=q_0$．在第二种情况下，$q_1(1)$ 是在 q_0 之上，这是因为从 $p_i(1)$ 到 p_0 的距离小于 ρ．于是存在 $u_1<1$ 使得 $q_i(u_1)=q_0$. 无论那种情况，向量场 $Z(u_1)$ 有过 q_0 的闭轨. □

引理 2.5 的证明．首先，我们将证明，若 γ 是非平凡的 ω 回复轨道，则存在稳定的分界线凝聚 γ，即存在稳定的分界线 γ_2，使得 $\alpha(\gamma_2)\supset\gamma$．取点 $p\in\gamma$ 以及过 p 与 X 匀断相交的圆 C．设 P: $D\subset C\to C$ 是定义在 D 上的 Poincaré 映射．我们有 $D\neq C$，否则 X 没有奇点．假设 γ 不是由稳定分界线凝聚的，即假设存在 C 中的区间 I，它包含 p，与稳定的分界线不相交．设 $I\subset C$ 是具有这种性质的最大区间．因为 γ 是 ω 回复的且 $p\in\gamma$，故存在某个整数 $k>0$，使得 $P^k(p)\leqslant I$．于是区间 $J=P^k(I)$ 包含在 I 之中．这

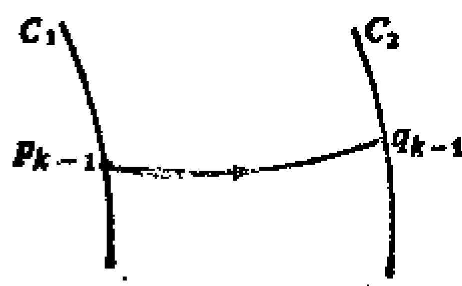


图 39

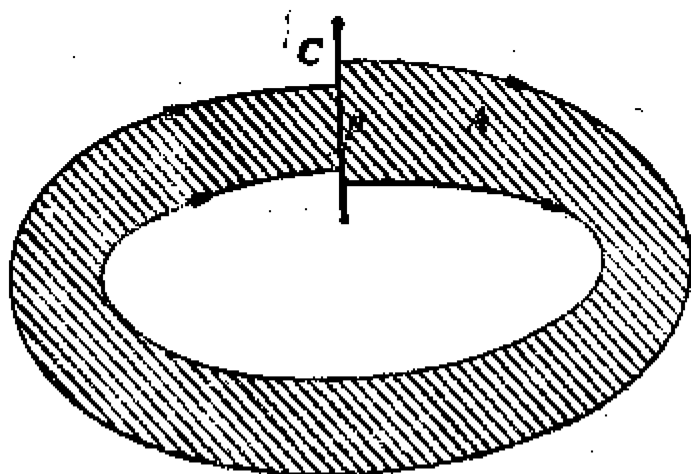


图 40

是因为，一方面由 $P^k(p)\in I, I\cap J\neq\varnothing$. 另一方面，若 $J\not\subset I$，那末 J 将包含一区间，I 的端点之一将是它的内点，因为 I 是与稳定分界线不相交的最大区间，所以 J 包含稳定分界线的点. 这些分界线在流下是不变的，因此它们在 P^k 下也是不变的. 并且由于 $J=P^k(I)$，推出 I 也包含鞍点的稳定分界线上的点. 但这与 I 的定义矛盾，于是 $P^k(I)\subset I$. 由此，我们能构造包含 p 的区域 A，同胚于圆环且在 $X_t(t>0)$ 下不变. 见图 40. 因为 γ 不能是 A 中的非平凡的 ω-回复轨道，所以这是矛盾的. 于是 γ 实际上是用某条稳定分界线 γ_2 凝聚的.

我们还断言：γ 是用某条非稳定分界线凝聚的或它自身是不稳定的分界线. 事实上，假设此断言不对. 若第二种情形不发生，同前面情况一样，考虑点 $p\in\gamma$ 以及在 C 中包含 p 的与不稳定分界线不相交的最大开弧 I. 因为 γ 是 ω-回复的，所以存在一整数 $k>0$，使得 $P^k(I)\cap I\neq\varnothing$，因而对某个 $q\in I$，$P^k(q)$ 是有定义的且 $P^{-k}(q)\in I$. 有两种可能性要考虑. 若 P^{-k} 不是定义在整个弧 I 上，那末存在一点 $z\in I$，它的负向轨道终结在鞍点. 特别地，存在某个不稳定分界线 $\bar{\gamma}$，使 $z\in I\cap\bar{\gamma}$，这与弧 I 的定义矛盾. 另一种可能性是 P^{-k} 在整个弧 I 上有定义，在这种情况下，同前面一样，我们将有 $P^{-k}(I)\subset I$，我们希望读者以这个叙述去完成这个断言的证明.

我们要指出，对于不可定向的流形，刚刚证明的性质也成立，差别仅在于上面所用的区域 A 在这里可能是 Möbius 带，其中仍不存在非平凡的回复轨道.

现设 γ_1 是不稳定的分界线，它或是 γ 或凝聚到 γ. 又设 γ_2 是凝聚到 γ 的稳定的分界线. 与引理 2.4 的证明相同，我们考虑与 X 匀断相交的圆 $C_1=X_{-\delta}(C)$ 和 $C_2=X_\delta(C)$. 设 P: $D\subset C_2\to C_1$ 是 Poincaré 映射且 F 是包含 $p\in\gamma$ 的流匣. 因为鞍点的个数是有限的，所以我们能取 F 与 X 可能有的所有鞍点联结不相交.

设 σ_1 和 σ_2 是对应于凝聚到 γ 的分界线 γ_1 与 γ_2 的鞍点. 考

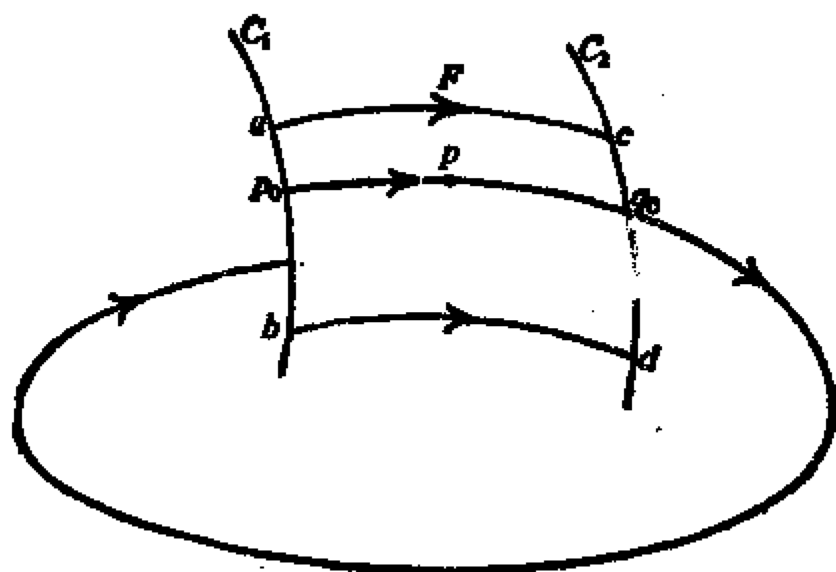


图 41

虑一族向量场 $Z(u)=X+\varepsilon uY$，此处 $\varepsilon>0$, $0\leqslant u\leqslant 1$ 且 Y 在 F 内部是与 X 匀断相交的，其方向向上，且在 F 的外部为零．若我们取 ε 适当小，那末 $Z(u)$ 对于一切 $u\in[0, 1]$ 邻近于 X，我们要证，对于某个 $0<u\leqslant 1$, $Z(u)$ 将有比 X 更多的鞍点联结．

我们在 $[a, b]$ 中固定一包含 p_0 为内点的小闭区间 I．如前，设 $\rho>0$ 是对于 $x\in I$ x 与过 x 的 $Z(1)$ 的正向轨道第一次与 C_2 相交的交点之间在 F 中的垂直距离的最小值．设 x_0 与 z_0 分别是 γ_1 和 $[a, b]$ 与 γ_2 和 $[c, d]$ 的第一个交点．我们指出，分界线弧 $\sigma_1 x_0$ 与 $\sigma_2 z_0$ 不受上面扰动 εuY 的影响．见图 42．

在 p_0 邻近取点 $x\in\gamma_1\cap I$ 以及点 $z\in\gamma_2\cap C_2$，使得 x 与 z 的垂直距离小于 ρ，对于某个整数 $i>0$，点 x 表示 γ_1 与 C_1 的第 i 次的交点．类似地，对于某个整数 $j>0$，点 z 表示 γ_2 与 C_2 的第 j 次交点．我们假定在 F 中 x 是在 z 之下．如果这是不可能的，那么我们必须改取指向向下的向量场 Y．

考虑把每一 u 映到 $Z(u)$ 的分界线 $\gamma_1(u)$ 与 C_1 的第 i 次交点 $x(u)$ 的映射以及把每一 u 映到 $Z(u)$ 的分界线 $\gamma_2(u)$ 与 C_2 的第 j 次交点 $z(u)$ 的映射．显然 $x(u)$ 与 $z(u)$ 对于充分小的 u 是有定义的，因为 M^3 是定向的，$x(u)$ 是在 $[a, b]$ 上单调增加的，而 $z(u)$ 是在 $[c, d]$ 上单调减少的．

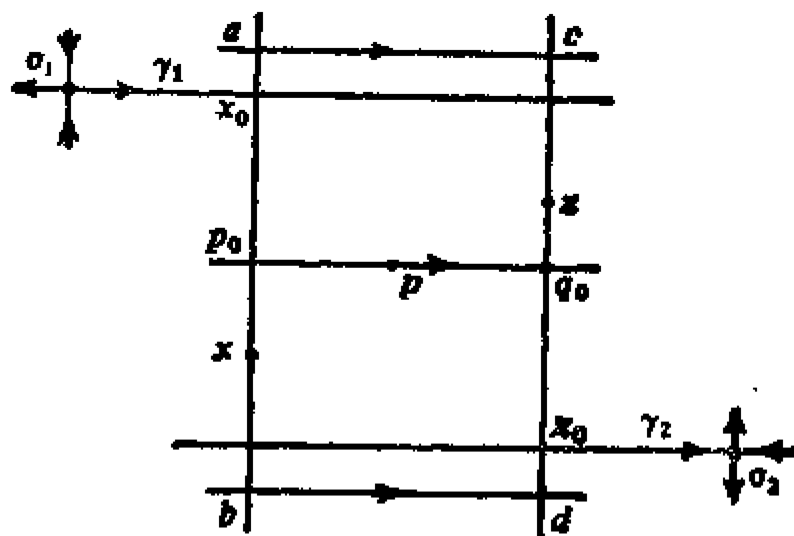


图 42

我们有两种情况需要讨论，首先假定 $x(u)$ 与 $z(u)$ 对于一切 $u\in[0, 1]$有定义．那末存在 $u_0\in(0, 1)$ 使得在 $x(u_0)$ 与 $z(u_0)$ 之间的垂直距离是零．这是因为 $x(u)$ 与 $z(u)$ 是连续的且 $x=x(0)$ 与 $z=z(0)$ 之间的垂直距离小于 ρ．于是在 $\sigma_1(u_0)$ 以及 $\sigma_2(u_0)$之间有一鞍点联结．

现在假定这些映射中一个，例如 $x(u)$，不是对一切 $u\in[0, 1]$ 都有意义，即对某个 $u_0\in(0, 1)$，$\gamma_1(u_0)$ 达到 P 的定义域的边界点，亦即它所达到的点的正向轨道直接趋于鞍点 σ_3．在这种情况下在 σ_1 与 σ_3 之间也将是鞍点联结．对于 $z(u)$ 不是对一切 $u\in[0, 1]$有意义的情况，推理是类似的．这就完成了引理 2.5 的证明，因而也完成了定理 2.6 的证明． □

在结束这一节时，我们指出，由定理 2.6 得出任何结构稳定的向量场 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是 Morse–Smale 的．

§3. 一些推广

下面我们对于定向曲面的 Morse–Smale 向量场的稠密性定理以及对于不可定向曲面它的部分推广作一些说明．

我们也将叙述关于在任意维的流形上的 Morse–Smale 向量场的开性与稳定性，特别地，在任意流形上都存在结构稳定向量

场. 然而, Morse-Smale 场在三维或更高维的流形的向量场空间中已不再是稠密的, 这将在下节得到证明. 然而, 我们将强调一种有用的特殊情况, 即任意紧致流形上的梯度场的空间, Morse-Smale 向量场是在这个空间稠的.

我们首先指出, 在引理 2.5 的证明中, 我们不能保证, 扰动以后所考虑的头几个鞍点之间存在鞍点联结. 这就使得我们提出如下问题, 设 γ_1 是 $X \in \mathscr{X}^r(M^2)$ 的鞍点不稳定的分界线, γ_2 是鞍点的稳定的分界线. 假定 $\omega(\gamma_1) \cap \gamma_2 \neq \varnothing$ 或 $\omega(\gamma_1) \cap \alpha(\gamma_2) \neq \varnothing$. 要知道在 X 的 C^r 扰动之下是否可能联结这二条分界线是一困难的问题, 这个问题当 $r \geqslant 1$ 时无论对于 M^2 是定向的还是不可定向的, 都没有解决.

当 M^2 不可定向时, 证明 Morse-Smale 场在 $\mathscr{X}^r(M^2)$ 中稠密的困难, 在于引理 2.5 的证明. 在这种情况下一切其它事实都是成立的. 在不可定向的情况下, 这个问题没有解决. 这个问题无论它的答案是肯定的, 还是否定的都是有趣的. 虽然否定答案是令人惊奇的. 在这方面, 一些已经取得的部分结果如下:

(1) 无论 M^2 是可定向的, 还是不可定向的, Morse-Smale 向量场在 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 中稠. Pugh 应用我们后面将叙述的封闭性引理得到了这个结果. 限制于 C^1 拓扑是由于到目前为止封闭性引理仅仅是对于这种情况被证实的.

(2) 易看到, 对于 $\mathscr{X}^r(P^2)$, $r \geqslant 1$, 这个定理是成立的, 这里 P^2 是投影平面, 这是因为在 P^2 上, 如同球面 S^2 的情况一样, 向量场不存在非平凡回复轨道. 对于 Klein 瓶 K^2 稠密性定理仍正确, 这是由 Markley 在 [56] 中证明了的. Gutierrez[30] 对于 K^2 情况简化了证明, 并且证明了在专格比 K^2 大一的不可定向的流形 L^2 上, 即在带有一个交叉帽的环面上非平凡回复轨道是"可定向的". 于是我们前面对于可定向流形的证明亦可应用到这种情况, 因此, 当 M^2 是定向或 $M^2 = P^2$, K^2 或 L^2, 对于任 $r \geqslant 1$, Morse-Smale 向量场在 $\mathscr{X}^r(M^2)$ 中是稠密的.

我们现在应用封闭性引理, 对于 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 叙述证明.

封闭性引理[88]. 设 M^n 是紧致的 n 维无边流形，取 $X\in\mathscr{X}^1(M^n)$，且设 γ 是 X 的非平凡回复轨道. 给定 $p\in\gamma$ 以及 $\varepsilon>0$，则存在 $Y\in\mathscr{X}^1(M^n)$，满足 $|Y-X|_{C^1}<\varepsilon$，使得 Y 过 p 的轨道是闭的. □

这个封闭性引理的证明，即使在曲面情况下也是极为棘手的. 就可微类而言，对于任意的 $r\geqslant2$ 以及 $n\geqslant2$，问题没有解决.

在曲面 M^2 的情况中，由非平凡回复轨道构造的闭轨不可能包围某个圆盘. 这是因为存在匀断相交于场且不包围圆盘的圆. 如同我们在这一章第二节中所构造的一样.

3.1 定理. 无论 M^2 是可定向或不可定向的，由所有 Morse-Smale 向量场所组成的子集在 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 中稠密.

证明. 我们要证明，任一向量场 $X\in\mathscr{X}^1(M^2)$ 能用仅有平凡回复轨道的 Kupka-Smale 向量场来逼近，于是定理将由命题 2.3 的推论直接得证.

在 X 附近取 Kupka-Smale 向量场 X^*，若 X^* 仅有平凡回复轨道，证明已完成. 否则考虑 X^* 的非平凡回复轨道 γ_1 以及点 $p\in\gamma_1$，利用封闭性引理，在 X^* 附近存在 X_1，X_1 具有过 p 的闭轨 σ_1，现用在 σ_1 附近有双曲闭轨 σ_1^* 的 Kupka-Smale向量场 X_1^* 去逼近 X_1. 若 X_1^* 仅有平凡回复轨道，那末 X_1^* 是 Morse-Smale 向量场. 否则，再从 X_1^* 开始，重复上面的过程，但在 σ_1^* 的邻域中 X_1^* 没有改变. 我们断言，这个过程的步骤是有限的，它以 2^g 为上界，这里 g 是流形 M 的亏格(环柄的个数). 事实上，这个过程的每一步好象是在较低亏格的流形 N^2 上进行讨论(或等价地在较高的 Euler-Poincaré 示性数 $K(N^2)$ 的流形上讨论，因为当 N^2 可定向时，$K(N^2)=2-2g(N^2)$. 而当 N^2 不可定向时，$K(N^2)=2-g(N^2)$[59], [119]). 因为对任意的 N^2，$K(N^2)\leqslant2$ 所以经过有限步骤以后，我们将得到仅有平凡回复轨道的 Kupka-Smale 向量场，于是，这个场就是所要求的 Morse-Smale 场.

我们来观察亏格的减少. 在 M 中沿着非平凡回复轨道所产生的双曲闭轨 σ_1^* 进行切割. 存在两种可能性需要讨论：要么我们得

到一个带边流形 M_{10}，要么得到两个带边的流形 M_{11} 与 M_{12}[10,W]。在第一种情况中，M_{10} 的边界由 σ_1^* 的一个或二个样本(copy)组成，这取决于 σ_1^* 可定向还是不可定向。在第二种情况中，M_{11} 与 M_{12} 的边界每一个都是 σ_1^* 的一个样本。在第一种情况下，我们粘上一个或二个圆盘 D_1 或 D_2，使得 $M_{10}\cup D_1$ 或 $M_{10}\cup D_1\cup D_2$ 是无边流形。于是，我们有 $K(M_{10}\cup D_1)=K(M)+K(D_i)$ 或 $K(M_{10}\cup D_1\cup D_2)=K(M)+K(D_1)+K(D_2)$。因为 $K(D_i)=1$，对 $i=1, 2$，所以 $K(M_{10}\cup D_1)$ 与 $K(M_{10}\cup D_1\cup D_2)$ 都比 $K(M)$ 大。在第二种情况下，$K(M)=K(M_{11})+K(M_{12})$，且 $K(M_{11})<1$，$K(M_{12})<1$，因为不然的话 σ_1^* 将界定圆盘，于是

$$K(M_{11}\cup D_1)=K(M_{11})+1>K(M)$$

以及

$$K(M_{12}\cup D_2)=K(M_{12})+1>K(M).$$

虽然这对于我们要达到的目的不是必要的，但我们能通过在 D_1 和 D_2 上放置一个渊点或一个源点去补充定义在 M_{10}，M_{11} 与 M_{12} 上的向量场 X_1^*，放置渊点还是源点由 σ_1^* 是排斥的还是吸引的来定。

我们继续这个过程，借助于粘上这些圆盘且使在圆盘的邻域上向量场不发生改变所得到的流形 M_{ij} $(j=0, 1, 2)$。由于 Euler-Poincaré 示性数不超过 2 且随着每一次所做的切割而增加，故切割的数目是有限的，且不超过所断言的 2^g。这就证明了这一定理。 □

对于 M^2 上的 Morse-Smale 向量场，我们也要指出，它们的等价类是由 Peixoto[83] 以及 Fleitas[19]所描述的。在[32]中 M^2 上的 Morse-Smale 向量场集合的连通分支被分类了。

现在考虑任意 n 维的已赋予 Riemann 度量的流形 M，一个基本问题是在 M 上是否存在结构稳定的向量场。[75]，[79]，[106]的结果证明存在许多 Morse-Smale 向量场，它们是结构稳定的，也见[57]。这些结果如下：

(1) 对 $r\geqslant1$，在 $\mathscr{X}^r(M^n)$ 中，Morse-Smale 向量场所组成的集合是开的和非空的；

(2) 若 $X \in \mathscr{X}^r(M^n)$, $r \geqslant 1$, 是 Morse-Smale 向量场, 那末 X 是结构稳定的;

(3) 所有 Morse-Smale 梯度场的集合在 $\mathrm{Grad}^r(M^n)$ 中 $r \geqslant 1$, 是开的和稠的.

这里 $\mathrm{Grad}^r(M^n)$ 表示所有从 M 到 $\mathbb{R}$ 的 C^{r+1} 映射关于 M 上 Riemann 度量的梯度场所组成的 $\mathscr{X}^r(M^n)$ 的子集. 考虑 Morse-Smale 梯度场的轨道结构, 如我们在第一章第一节所说的, 梯度场不能有闭轨, 而且每一轨道的 α 和 ω 极限集都是奇点. 我们留给读者去证明, 甚至非游荡集也由奇点组成. 于是 Morse-Smale 梯度场刚好是其非游荡集是由有限个双曲奇点组成的 Kupka-Smale 向量场.

当 $r=1$, 或 $r \geqslant 1$ 而 M^2 是可定向的时候, Morse-Smale 场在 $\mathscr{X}^r(M^2)$ 中是稠的, 或在 $\mathrm{Grad}^r(M^n)$ 中是稠的. 与此形成对照, 对于 $n \geqslant 3$ Morse-Smale 场在 $\mathscr{X}^r(M^3)$ 中不是稠的, 这个事实将在下节的 $\mathscr{X}^r(M^3)$ 中具有无穷多周期轨道(因而它不是 Morse-Smale 向量场)的结构稳定向量场的例子中看到.

§4. 关于结构稳定的一般叙述及其它

在这节我们将简要地叙述 Morse-Smale 微分同胚, Anosov 微分同胚以及满足公理 A 与匀断条件的微分同胚. 第一类相似于前一节中所叙述的 Morse-Smale 向量场, 最后一类包括前两类且构成了目前所知的最普遍的一类结构稳定的微分同胚. 我们将详细叙述两个著名的例子, 这两个例子给予后两类微分同胚一个很好的说明. 其中一个是由 Thom 引入的(T^2 上 Anosov 微分同胚), 另一个是 Smale 马蹄.

除其固有的重要性外, 微分同胚的研究是与了解向量场的轨道的结构密切相关的. 这一点已经在 Poincaré 和 Birkhoff 的关于动力系统的定性理论的开辟性工作中被强调. 一个例子是向量场的轨道空间在闭轨邻域中的描述. 如在第三章所看到的, 我们

借助对应于匀断截痕的 Poincaré 映射(或局部微分同胚)做到了这一点,在第三章的末尾,我们借助于扭扩微分同胚的方法推广了这个概念. 于是,n 维流形的任一微分同胚 f 描述了 $n+1$ 维流形上向量场 X_f 的 Poincaré 映射. 这个场 X_f 被称为 f 的扭扩,它的轨道与 f 的轨道自然地对应起来. 特别地,X_f 是 Kupka-Smale 场当且仅当 f 是 Kupka-Smale 微分同胚. 而且,X_f 是结构稳定的当且仅当 f 是结构稳定的.

设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$. 点 $p\in M$ 是 f 的**非游荡点**,若对 p 的任意邻域 U 以及任意整数 $n_0>0$,存在整数 n,使得 $|n|>n_0$ 且 $f^nU\cap U\neq\varnothing$. f 的非游荡点集 $\Omega(f)$ 是闭的和不变的,即它由 f 的整条轨道所组成. 对于任意 $q\in M$,极限集 $\omega(q)$ 与 $\alpha(q)$ 包含在 $\Omega(f)$ 之中. 特别地,f 的每一不动点或周期点属于 $\Omega(f)$.

我们说 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是 Morse-Smale 的,只要

(a) $\Omega(f)$ 由有限个不动点和周期点所组成,这些点都是双曲的;

(b) 不动点与周期点的稳定与不稳定流形互相都是匀断相交的.

下面,我们列举关于 Morse-Smale 微分同胚的一些重要事实.

(1) 对于任意流形 M 及任意 $r\geqslant 1$, Morse-Smale 微分同胚的集合在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中是开的且是非空的[76].

(2) 若 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是 Morse-Smale 的,那末 f 是结构稳定的[76],[79].

(3) Morse-Smale 微分同胚的集合在 $\mathrm{Diff}^r(S^1)$ $(r\geqslant 1)$ 中稠. 这个事实由 Peixoto 引入,可由关于微分同胚的 Kupka-Smale 定理直接证明,而且它的推证类似于本章引理 2.4 的证明. 下面是一个更为精巧的证明. 设 $f\in \mathrm{Diff}^r(S^1)$,取 C^∞ 微分同胚 $\tilde{f}$,与 f C^r 邻近. 考虑 $\tilde{f}$ 的扭扩 $X\tilde{f}$,它是定义在 T^2 上或 K^2 上的 C^∞ 向量场,依赖于 f 在 S^1 上保持定向或逆转定向而定. 考虑 S^1 作为在 T^2 或 K^2 上 $X\tilde{f}$ 的整体的匀断截痕,以 $\tilde{f}$ 为相应的 Poincaré 映

射. 若 Y 是在 T^2 上或 K^2 上 C^r 邻近于 $X\tilde{f}$ 的向量场, 那末 S^1 亦是 Y 的匀断截痕, 而且相应于 Y 的 Poincaré 映射 g 是 C^r 邻近于 $\tilde{f}$. 因而也 C^r 邻近于 f. 由于 Morse-Smale 向量场在 $\mathscr{X}^r(T^2)$ 或 $\mathscr{X}^r(K^2)$ 中稠密, 我们能选择 Y 是 Morse-Smale 的且 C^r 邻近于 $X\tilde{f}$. 这就推得 g 是 C^r 邻近于 f 的 Morse-Smale 微分同胚.

(4) 所有 Morse-Smale 微分同胚的集合不在 $\mathrm{Diff}^r(M^n)$ $(n\geqslant 2)$ 中稠. 我们下面描述一个非空的开集 $\mathscr{U}\subset \mathrm{Diff}^r(S^2)$ 使得 $\mathscr{U}\cap M-S=\varnothing$. 类似的例子能在维数 $n\geqslant 2$ 的任意流形上构造出来. 考虑 S^2 上的 C^∞ 向量场 X, 它具有从鞍点到自身的鞍点联结, 如图 43 所示. σ_1 和 σ_2 是渊点, σ_4 是源点, σ_3 是鞍点, 它们都是双曲的. 设 X_t 是 X 所导出的流, 且设 $f=X_1$ 是时间为 1 的微分同胚, 则 σ_3 是 f 的双曲不动点, 且 $W^s(\sigma_3)-\sigma_3$ 的一分支与 $W^u(\sigma_3)-\sigma_3$ 的一分支相合. 我们扰动 f 以便得到微分同胚 g, 它以 σ_3 为双曲不动点且除 σ_3 外 $W^s(\sigma_3, g)$ 与 $W^u(\sigma_3, g)$ 匀断相交的交集是 g 的一些轨道. 为此, 我们取 $p\in W^s(\sigma_3)\cap W^u(\sigma_3)$, $p\neq\sigma_3$ 以及 p 的小邻域 U, 具有 $U\cap fU=\varnothing$. 设 $\phi: S^2\to S^2$ 是支撑在 U 上的 C^r 的微分同胚(于是, ϕ 在 $K=M-U$ 上是恒同), 具有 $\phi(p)=p$, 且 $W=\phi(W^u(\sigma_3))$ 在 p 点与 $W^s(\sigma_3)$ 匀断相交. 定义 $g=\phi\circ f$, 我们断言 g 以及充分邻近于 g 的微分同胚不是 Morse-Smale 的. 由于在 U 之外 $g=f$, σ_3 是 g 的双曲不动点以及对 f 和 g, σ_3 的局部稳定与不稳定的流形是相合的. 但 $W\subset W^u(\sigma_3, g)$. 事实上, 若 $x\in W$, 那末 $\phi^{-1}(x)\in W^u(\sigma_3)$ 以及有 $(\phi\circ f)^{-1}(x)=f^{-1}\phi^{-1}(x)\in W^u(\sigma_3)\cap K$. 由于 ϕ 在 K 上是恒同映射, 故对于 $n\geqslant 1$, $(\phi\circ f)^{-n}(x)=f^{-n}\cdot\phi^{-1}(x)\in W^u(\sigma_3, g)\cap K$, 因

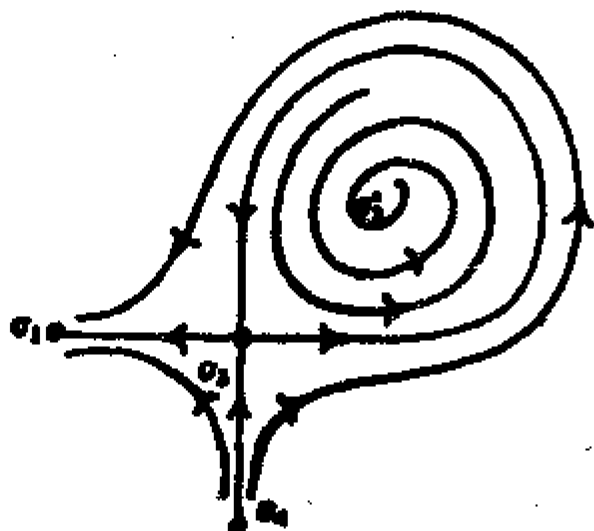


图 43

为当 $n\to\infty$ 时，$g^{-n}(x)=(\phi\circ f)^{-n}(x)$ 收敛于 σ_3，所以 $x\in W^u(\sigma_3, g)$，从而 $W\subset W^u(\sigma_3, g)$．另一方面，$W^s(\sigma_3)\cap U\subset W^s(\sigma_3, g)$．事实上，若 $y\in W^s(\sigma_3)\cap U$，那末 $f(y)\in W^s(\sigma_3)\cap K$，于是，对于 $n\geqslant 1$，$g^n(y)=(\phi\circ f)^n(y)=f^n(y)\in W^s(\sigma_3)\cap K$．因为当 $n\to\infty$ 时，$g^n(y)$ 收敛于 σ_3，所以 $y\in W^s(\sigma_3, g)$，这证明了 $W^s(\sigma_3)\cap U\subset W^s(\sigma_3, g)$．因而，$W^s(\sigma_3, g)$ 在 p 点与 $W^u(\sigma_3, g)$ 匀断相交．虽然并非必要，但我们能稍稍扩充这些论述，使得 $W^s(\sigma_3, g)$ 与 $W^u(\sigma_3, g)$ 在它们相交的一切点是匀断相交的．这符合关于微分同胚的 Kupka-Smale 定理的一个断言．上述 p 点，即 $W^s(\sigma_3, g)$ 与 $W^u(\sigma_3, g)$ 匀断相交的交集的一点，被称为匀断同宿点．要求读者在作为草图的图 45 上沿着匀断同宿轨道画出稳定与不稳定流形的交集的图．

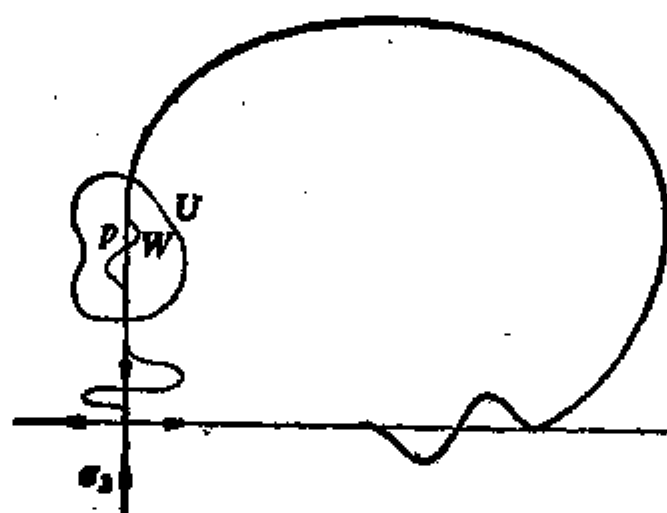


图 44

Birkhoff 曾证明了上述 p 点是用 g 的双曲周期点凝聚起来的，Smale 把这些结果推广到高维情况[106]，也见[66]，这里仅需要 p 是非游荡的，为此，考虑 $W^u(\sigma_3, g)$ 的从 σ_3 到 p 的弧 l．对于 p 的任一邻域 U，在 U 中选择过 p 的 $W^u(\sigma_3, g)$ 的小弧 l_1．因 l_1 是与 $W^s(\sigma_3, g)$ 匀断相交的，利用 λ 引理，对于一切大于某个 $n_0>0$ 的 n，$g^n(l_1)$ 包含一条任意邻近于 l 的弧．由于 $l_1\subset U$ 且 $l\cap U\neq\varnothing$，对 $n>n_0$，我们有 $g^nU\cap U\neq\varnothing$，于是，$p\in\Omega(g)$，又由于 p 不是周期的，故 g 不

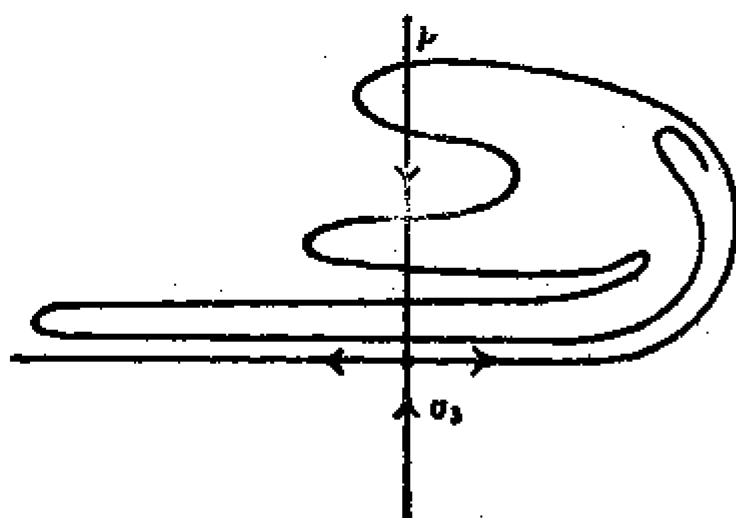


图 45

是 Morse-Smale 的. 对于充分邻近于 g 的一切微分同胚亦有同样的情况出现, 因为它们也有匀断的同宿点. 这是由于, 当我们小扰动这个微分同胚时, 鞍点的稳定与不稳定流形的紧致部分在 C^r 拓扑下, 改变不大, 因而我们能保证这些流形仍有与被扰动的鞍点不同的匀断相交的交集轨道.

由 M^2 上 Morse-Smale 微分同胚的非稠性, 利用扭扩, 我们能导出, Morse-Smale 向量场在 $\mathscr{X}^r(M^n)$ $(n\geqslant 3)$ 中的非稠性.

我们现在给出的另一个例子是由 Thom 引入的, 它是具有无穷多周期轨道的微分同胚. 我们将要证明这个微分同胚是结构稳定的.

这是启发 Anosov 并由他给出的一类具有无穷多个周期轨道的结构稳定的动力系统[3]的例子之一. 特别地, 在这一类系统中存在不是 Morse-Smale 的结构稳定系统.

考虑 $\mathbb{R}^2$ 的线性自同构 L, 就 $\mathbb{R}^2$ 的标准基而言, L 可用具有整数元素且行列式为 1 的双曲矩阵来表示. 易见, L 的特征值 λ 与 $\frac{1}{\lambda}$, $|\lambda|<1$, 是无理数, 且它的特征空间 E^s 与 E^u 有无理数的斜率. 由于 $\det L=1$, 因而 L^{-1} 具有相同的性质. 若 $\mathbb{Z}^2\subset\mathbb{R}^2$ 表示具有整数坐标的点集, 那末 $L(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$. 考虑 $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上的流形结构, 对于它自然投影 π: $\mathbb{R}^2\to T^2$ 是局部微分同胚. 这个流形结构可象第一章第一节例 2 中那样把 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 与环面恒同来得到. 我们指出, $\pi(u, v)=\pi(u', v')$ 当且仅当 $u'-u\in\mathbb{Z}$ 且 $v'-v\in\mathbb{Z}$. 此时 $\pi(L(u, v))=\pi(L(u', v'))$. 这使我们能定义映射 f: $T^2\to T^2$, 其中 $f(\pi(u, v))=\pi L(u, v)$, 由于 π 是 C^∞ 局部微分同胚, 有 f 是 C^∞ 的. 同样的推理可用到 L^{-1} 上, 于是 f 是 C^∞ 的微分同胚.

对于每一 $p\in T^2$ 以及满足 $\pi(x)=p$ 的 $x\in\mathbb{R}^2$, 曲线 $W^s(p)=\pi(x+E^s)$ 是在 T^2 中稠的, 于是 $\{W^s(p); p\in T^2\}$ 定义了 T^2 上一叶层, 称为稳定的叶层, 它的每一叶在 T^2 中稠. 而且, 这叶层是在 f 下不变的, 即 $fW^s(p)=W^s(f(p))$. 类似地, 我们用 $W^u(p)=$

$\pi(x+E^u)$ 定义不稳定的叶层 $\{W^u(p); p\in T^2\}$. 若令 E^s_p 与 E^u_p 表示在 p 点的 $W^s(p)$ 与 $W^u(p)$ 的切空间，则 $E^s_p=d\pi_x(E^s)$，$E^u_p=d\pi_x(E^u)$ 且 $E^s_{f(p)}=df_p(E^s_p)$，$E^u_{f(p)}=df_p(E^u_p)$.

借助于 π，从 $\mathbb{R}^2$ 上把度量引到 T^2 上，即若 $w_1, w_2\in T(T^2)_{p=\pi(x)}$，则我们定义 $\langle w_1, w_2\rangle_p$ 为 $\langle d\pi_x^{-1}w_1, d\pi_x^{-1}w_2\rangle$. 在这个度量下，我们有

$$\|df_pv\|=|\lambda|\|v\|,\ 若\ v\in E^s_p;$$
$$\|df_pw\|=|\lambda|^{-1}\|w\|,\ 若\ w\in E^u_p.$$

由此得到，若 $q\in W^s(p)$，那末当 $n\to\infty$ 时，$d(f^n(q), f^n(p))\to 0$，且若 $q\in W^u(p)$，那末当 $n\to\infty$ 时，$d(f^{-n}(q), f^{-n}(p))\to 0$. 因而，$f$ 的每一周期点 p 是双曲的，且 p 的稳定与不稳定流形就是上面定义的 $W^s(p)$ 与 $W^u(p)$. 而且对任意 $p, q\in T^2$, $W^s(p)$ 与 $W^u(p)$ 是匀断相交的且 $W^s(p)\cap W^u(q)$ 在 T^2 中稠密. 特别地，$p=\pi(0)$ 是 f 的双曲不动点，且它的匀断同宿点在 T^2 中稠密. 与前面例子一样，这就推出 f 以及邻近于 f 的任意微分同胚都不是 Morse-Smale 的. 由 Birkhoff 的结果以及匀断同宿点的稠密性推得 f 的周期点是在 T^2 中稠的. 我们下面给出这一论点的直接证明.

4.1 命题. f: $T^2\to T^2$ 的周期点在 T^2 中稠.

证明. 设 $\mathscr{L}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中具有有理数坐标的点集. 我们将证明 $\pi(\mathscr{L})$ 与 f 的周期点集 $\mathrm{Per}(f)$ 相合. 由于 $\mathscr{L}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中稠，于是 $\mathrm{Per}(f)$ 在 T^2 中稠. 若 $\mathscr{L}_n=\{(m_1/n, m_2/n); m_1, m_2\in\mathbb{Z}\}$，那末 $\mathscr{L}=\bigcup_{n\geq 1}\mathscr{L}_n$. 因为 L 是整数矩阵，所以我们有 $L(\mathscr{L}_n)=\mathscr{L}_n$，因此 $f(\pi\mathscr{L}_n)=\pi\mathscr{L}_n$. 由于

$$\pi\mathscr{L}_n=\pi\{(m_1/n, m_2/n), m_1, m_2\in\mathbb{Z}, 0\leqslant m_1\leqslant n, 0\leqslant m_2\leqslant n\},$$

我们推得 $\pi\mathscr{L}_n$ 是 T^2 的有限的不变子集，因而它的点是周期的. 故 $\pi(\mathscr{L})\subset\mathrm{Per}(f)$. 另一方面，设 $x\in\mathbb{R}^2$，对某个整数 n，满足 $f^n(\pi(x))=\pi(x)$. 我们断言，x 有有理数的坐标. 事实上，因 $\pi(L^n_x)=\pi(x)$，点 $y=L^nx-x$ 有整数坐标. 由于 L 是整数的双曲矩阵，有 L^n-I 是可逆的整数矩阵. 于是 $(L^n-I)^{-1}$ 是元素都为有理数的矩阵. 因而，$x=(L^n-I)^{-1}_y$ 有有理坐标，故 $\mathrm{Per}(f)$ 包含

在 $\pi(\mathscr{L})$ 之中，这就证明了断言. □

乍看起来，证明带有无限多周期点的微分同胚 f 是结构稳定的，似乎是很困难的. 然而，有一个有用的性质：f 有大范围的双曲结构且它就是由 $\mathbb{R}^2$ 上线性同构导出的. 特别地，f 的一切周期轨道是具有相同维数的稳定流行的鞍点. 对比之下，Morse-Smale 微分同胚必须有源点与渊点，通常还有鞍点. 我们未给出 f 是结构稳定的简单的漂亮的证明，它的证明是由 Moser 给出的[35]. 这个证明很接近于在第二章中 Grobman-Hartman 定理的分析证明. 我们回顾，f 是由 $\mathbb{R}^2$ 上线性同构 L 所导出的，这里 L 是由元素都是整数，行列式为 1 的双曲矩阵所定义的.

4.2 定理. 微分同胚 f: $T^2 \to T^2$ 是结构稳定的.

证明. 取 $g \in \mathrm{Diff}^r(T^2)$ 邻近于 f，我们断言，存在邻近于 L 的微分同胚 G: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，它在 T^2 上诱导出 g. 事实上，对每 $x \in \mathbb{R}^2$，我们有 $f\pi(x) = \pi L(x)$，这里 π 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 T^2 上的标准投影. 因为 $g\pi(x)$ 是邻近于 $f\pi(x)$，所以存在唯一点 $y \in \mathbb{R}^2$ 邻近于 $L(x)$，且 $\pi(y) = g\pi(x)$. 我们定义 $G(x) = y$，从而得到 $\pi G(x) = g\pi(x)$. 易验证 G 与 L 是 C^r 邻近的. 现在记 $G = L + \Phi$，这里 Φ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 C^r 小的映射. 因 L 是双曲的，我们从第二章引理 4.3 知道，L 与 $L + \Phi$ 是共轭的，即存在 $\mathbb{R}^2$ 上的同胚 H，使得 $HL = GH$. 因此，仅需验证 H 利用 $\pi H = h\pi$ 导出了 T^2 上的同胚 h，这是因为这将推得 $hf = gh$. 事实上，$\pi HL = h\pi L = hf\pi$；类似地，$\pi GH = g\pi H = gh\pi$，这样，$hf\pi = gh\pi$. 因 π: $\mathbb{R}^2 \to T^2$ 是满射，我们得到 $hf = gh$. 现验证 $\mathbb{R}^2$ 上同胚 H 诱导出 T^2 上的同胚 h. 在解方程

$$HL = GH$$

中，我们记 $H = I + u$ 以及 $G = L + \Phi$，得

$$uL = Lu + \Phi(I + u),$$

我们要求它的解 $u \in C_b^0(\mathbb{R}^2)$. 对于这一定理，我们需要把 $I + u$ 投影成 T^2 上的映射，后面的要求等价于：对于每一 $x \in \mathbb{R}^2$ 以及具有整数坐标的点 p，存在具有整数坐标的点 q，使得

$$(I + u)(x + p) = q + (I + u)(x)$$

即 $$u(x+p)=g-p+u(x).$$
但对于邻近 f 的 g 构造出来的 u 应具有小的模．于是，我们推得对任意 $x\in\mathbb{R}^2$ 以及任意具有整数坐标的点 p，有

$$u(x+p)=u(x),$$

由此，它引导我们去讨论 $C_b^0(\mathbb{R}^2)$ 中紧子空间 $\mathscr{P}$，它是由对 $\mathbb{R}^2$ 中任意的 x 与 p，满足

$$u(x+p)=u(x)$$

的周期函数 $u\in C_b^0(\mathbb{R}^2)$ 组成，其中，p 有整数坐标，显然 $\mathscr{P}$ 在 $C_b^0(\mathbb{R}^2)$ 中闭，且

$$\mathscr{L}(\mathscr{P})\subset\mathscr{P}$$

这里算子 $\mathscr{L}$: $C_b^0(\mathbb{R}^2)\to C_b^0(\mathbb{R}^2)$ 是由

$$\mathscr{L}(u)=uL-Lu$$

定义的．而且因为 L 是双曲的，所以 $\mathscr{L}$ 是可逆的．另一方面，因为 $G=L+\Phi$ 确实投影成 T^2 上一映射，并且 Φ 是 C^r 小的，同理，我们有 $\Phi\in\mathscr{P}$．所以映射 μ: $\mathscr{P}\to\mathscr{P}$,

$$\mu(u)=\mathscr{L}^{-1}(\Phi(I+u))$$

是合理定义的，且它是压缩的．μ 有唯一的不动点 u 满足方程

$$uL-Lu=\Phi(I+u),$$

或等价地 $$(I+u)L=(L+\Phi)(I+u).$$
证明 $H=I+u$ 是同胚与第二章引理 4.3 的方法相同．因为 $u\in\mathscr{P}$，所以同胚 $H=I+u$ 投影到 T^2 上一同胚 h，且 $hf=gh$．这就证明了 f 在 $\mathrm{Diff}^r(T^2)$ $(r\geqslant1)$ 中是结构稳定的． □

这个微分同胚 f: $T^2\to T^2$ 是 Anosov 微分同胚的一个很好的例子．我们来给出 Anosov 微分同胚的一般定义．

定义．设 M 是紧致流形，我们说 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$，$r\geqslant1$，是 Anosov 微分同胚，只要

(a) M 的切丛能分解成连续的直和，

$$TM=E^s\oplus E^u;$$

(b) 子丛 E^s 和 E^u 在 f 的导算子 df 下不变，即对一切 $x\in M$，有

$$Df_x E^s_x = E^s_{f(x)}$$

以及
$$Df_x E^u_x = E^u_{f(x)};$$

(c) 存在 M 上的 Riemann 度量以及常数 $0<\lambda<1$，使得对任意 $x\in M$, $v\in E^s_x$ 以及 $u\in E^u_x$, 有

$$\|Df_x v\|\leqslant\lambda\|v\|$$

和
$$\|Df_x^{-1}u\|\leqslant\lambda\|u\|.$$

Anosov 第一个证明，对于任意维流形 M 上的这些微分同胚在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中是结构稳定的(见 [3]，[65] 以及 [109] 中 Mather 所写的附录). 他还定义了相似的一类向量场，证明它们的结构稳定性. Anosov 微分同胚的扭扩就是这样一类向量场的例子，另一个重要的例子是负曲率流形上的测地流.

我们指出，Anosov 微分同胚的定义使流形受到了极强的限制，例如，在紧致二维流形中仅环面允许存在 Anosov 微分同胚. 人们甚至相信 Anosov 微分同胚仅存在于很特殊的流形上，比如环面 T^n 以及零位流形[109]、[113] 相反，在任一流形上都存在 Morse-Smale 微分同胚. 我们还知道，在 T^n 上每一 Anosov 微分同胚共轭于象上面例子所描述的，由 $\mathbb{R}^n$ 中的线性同构所导出的一Anosov 微分同胚[56]. 人们推测，任意 Anosov 微分同胚的周期轨道在流形上稠密. 关于这个问题，Franks[30] Manning[55]，Newhouse[67] 以及 Farrell-Jones[18] 得到了不同的重要结果. 新近，Franks 和 Williams[34] 构造了一类非常有趣的 Anosov 流，它的非游荡集不是整个流形. 关于 Anosov 微分同胚，相应的问题仍未解决.

因此，我们有了两类结构稳定的微分同胚，Morse-Smale 微分同胚与 Anosov 微分同胚. 如同我们已经强调的，它们具有很不相同的性质. 接着 Smale 引进了包含这二类的一类新的微分同胚这些微分同胚是结构稳定的，我们将描述它们，并且猜测它们包含每一个结构稳定的微分同胚.

考虑一紧致流形 M，设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$，且设 $\Lambda\subset M$ 是闭的不变集，$f\Lambda=\Lambda$. 我们称 Λ 是关于 f 双曲的，只要

(a) M 的切丛限制在 Λ 上有连续的直和分解,

$$T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda,$$

它们在 Df 下不变;

(b) 存在 Riemann 度量, 以及数 $0<\lambda<1$, 使得对任意 $x\in \Lambda$, $v\in E^s_x$ 以及 $u\in E^u_x$, 有

$$\|Df_x v\| \leqslant \lambda \|v\|$$

以及
$$\|Df_x^{-1} u\| \leqslant \lambda \|u\|.$$

现考虑非游荡集 $\Omega=\Omega(f)$, 它是闭的, 不变的.

定义. 我们说 f 满足**公理** A, 只要 Ω 关于 f 是双曲的, 且

$$\Omega = \overline{\mathrm{Per}(f)}$$

即 f 的周期点在 Ω 中稠密.

若 f 满足公理 A, 则 Smale 证明了 $\Omega=\Omega(f)$ 可分解为互不相交的、不变且传递的闭子集的并,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_k.$$

详见[109], [70], [72], [77], [101]. 集合 Ω_i 称为**基集**. 传递性是指在每一 Ω_i 中存在稠密轨道. 在每一 Ω_i 中, 一切周期轨道有相同维数的稳定流形. 对于 Morse-Smale 微分同胚, 基集是周期轨道, 对于 T^2 上的 Anosov 微分同胚, 仅存在一个基集, 即整个环面. 一般地, 这些基集可能有更复杂的结构, 这在后面的例子中我们将会看到. 象在 Morse-Smale 的情形一样, 它们可能是吸引子, 排斥子或鞍型. 在下面的例 3 至例 6 中, 我们描述了非周期基集的有趣的情况, 它们分别是吸引子, 排斥子以及鞍型. 例 5 和例 6 可以视为被 Williams[121] 描述了其结构的相当大的一类公理 A 吸引子的特例.

关于上述公理 A 的定义, 已经知道, 当 M 的维数 $=2$ 时, $\Omega(f)$ 是双曲的蕴涵 $\overline{\mathrm{Per}(f)}=\Omega(f)$ 是成立的. 但在高维情况下这个事实不成立[71],[16].

让我们给出关于基集的传递性要求的最后一点说明. 由于直接验证这个要求是困难的, 如下的判别法则可能是很有用的. 如同在后面的例 4 与例 5 中那样. 若 Λ 是 f 的双曲集, 周期点在其

中稠且若对于任意 $p, q\in \mathrm{Per}(f)\cap\Lambda$ 有

$$\Lambda\supset W^s(p)\cap W^u(q)\neq\varnothing,$$

那末 Λ 是传递的. 事实上, 对任意 $p\in\mathrm{Per}(f)\cap\Lambda$, $W^s(p)$ 将凝聚到 $\mathrm{Per}(f)\cap\Lambda$ 上, 于是, $W^s(p)$ 在 Λ 中稠. 对于每一 $p\in \mathrm{Per}(f)\cap\Lambda$, 选取 p 在 Λ 中的基邻域

$$U_1^p,\ U_2^p,\ \cdots,\ U_k^p,\ \cdots$$

那末

$$V_k^p=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n U_k^p$$

是在 Λ 中开与稠的. 因为 Λ 是闭的, 所以它满足 Baire 性质, 且 f 在 Λ 中周期轨道是可数的, 这是因为它们是双曲的. 于是对 $p\in\mathrm{Per}(f)\cap\Lambda$ 以及 $k\in\mathbb{N}$,

$$D=\bigcap_{p,k} V_k^p$$

在 Λ 中稠. 易见, 任意 $x\in D$ 有在 Λ 中稠密的轨道. 事实上给定 Λ 的非空开子集 A, 存在某个 $U_k^p\subset A$ 又因为 $x\in V_k^p=\bigcup_n f^n U_k^p$, 所以对某个 $n\in\mathbb{Z}$, 有

$$f^{-n}(x)\in U_k^p\subset A.$$

有了结构稳定性, 我们将推广稳定与不稳定流形到非周期轨道. 设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 且取 $x\in M$, 我们定义

$$W^s(x)=\{y\in M,\ d(f^n x,\ f^n y)\to 0, \text{当 } n\to\infty \text{ 时}\}$$

以及

$$W^u(x)=\{y\in M,\ d(f^n x,\ f^n y)\to 0, \text{当 } n\to-\infty \text{ 时}\}$$

这里 d 表示由 M 上的 Riemann 度量所引入的度量, 当 $\Omega=\Omega(f)$ 为双曲的且 $x\in\Omega$ 时, $W^s(x)$ 与 $W^u(x)$ 是维数互余的 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^s$ 与 $\mathbb{R}^u$ 的 C^r 单射浸入[39]. 由此可见, 称集合 $W^s(x)$ 和 $W^u(x)$ 为流形是恰当的. 在满足公理 A 的微分同胚的每一基集 Ω_i 中, Ω_i 中的一切轨道的稳定流形具有相同维数. 而且, 它们的并集与一切其 ω 极限集包含于 Ω_i 的点的集合是相合的. 见[9]. 特别地, 若 Ω_i 是吸引子, 那末在 Ω_i 中点的稳定流形的并集就是 Ω_i 的邻域. 关于由 $\mathbb{R}^2$ 的线性自同构导出的 T^2 上的 Anosov 微分同胚, 稳定流形是 $\mathbb{R}^2$ 上平行线到 T^2 上的投影. 对于不稳定流形, 我们可作类似的讨论.

定义. 令 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 满足公理 A. 我们称 f 满足**匀断条件**,若对任意 $x, y\in\Omega(f)$, $W^s(x)$ 与 $W^u(y)$ 是匀断相交的.

在讨论满足公理 A 与匀断条件的微分同胚的结构稳定性之前,我们将给出它们的一些例子.

例 1. Morse–Smale 微分同胚.

例 2. $\mathbb{R}^2$ 上线性自同构导出的环面 T^2 上的 Anosov 微分同胚. 虽然我们没有证明. 任一 Anosov 微分同胚满足公理 A 和匀断条件,但这个结论是正确的.

例 3. 设 g: $S^1\to S^1$ 是 Morse–Smale微分同胚, 具有两个不动点,北极点 n 是排斥子,南极点 s 是吸引子. 设 f: $T^2\to T^2$ 是由 $\mathbb{R}^2$ 上线性自同构导出的 Anosov 微分同胚, 考虑积微分同胚 $g\times f$: $S^1\times T^2\to S^1\times T^2$. 易看出,它的非游荡集有两个部分 $\Omega_1=\{n\}\times T^2$ 以及 $\Omega_2=\{s\}\times T^2$, 而且它们是双曲的、传递的. 这里 Ω_1 是排斥子,Ω_2 是吸引子. 我们来验证匀断条件, 设 $(z, w)\in S^1\times T^2$ 是 $W^s(x)$ 与 $W^u(y)$ 交集中的一点, 其中 $x\in\Omega_2$ 而 $y\in\Omega_1$. 于是 $W^s(x)$ 是 $S^1\times\{w\}$ 中 W_1^s 与 $\{z\}\times T^2$ 中的 W_2^s 的积. 类似地,我们用 W_1^u 和 W_2^u 分别表示 $W^u(y)$ 在 $S^1\times\{w\}$ 和 $\{z\}\times T^2$ 中的因子, 由于

$$W_1^s=(S^1-n)\times\{w\}$$

和
$$W_1^u=(S^1-s)\times\{w\},$$

W_1^s 与 W_1^u 是在 $S^1\times\{w\}$ 中匀断相交的, 且 W_2^s 和 W_2^u 是在 $\{z\}\times T^2$ 中匀断相交的. 这是因为它们是在 $\mathbb{R}^2$ 中平行于线性无关的两个特征向量的两条直线的投影. 这就证明 $W^s(x)$ 与 $W^u(y)$ 是匀断相交的. 若 x 和 y 都属于 Ω_1 或都属于 Ω_2, $W^s(x)$ 与 $W^u(y)$ 的匀断性是显然的. 于是微分同胚 $g\times f$: $T^3\to T^3$ 满足公理 A 与匀断条件. 显然,$g\times f$ 既不是 Morse–Smale 的, 也不是 Anosov 的.

例 4. 在这一个例子中,我们描述 S^2 上满足公理 A 与匀断条件的微分同胚 f. 其非游荡集 $\Omega=\Omega(f)$ 由三个基集组成: Ω_1 是排斥的不动点; Ω_3 是吸引的不动点, Ω_2 是 Cantor 集. 在 Ω_2 中周期鞍点是稠密的. 这个例子的重要部分是"Smale 马蹄". 在球的北

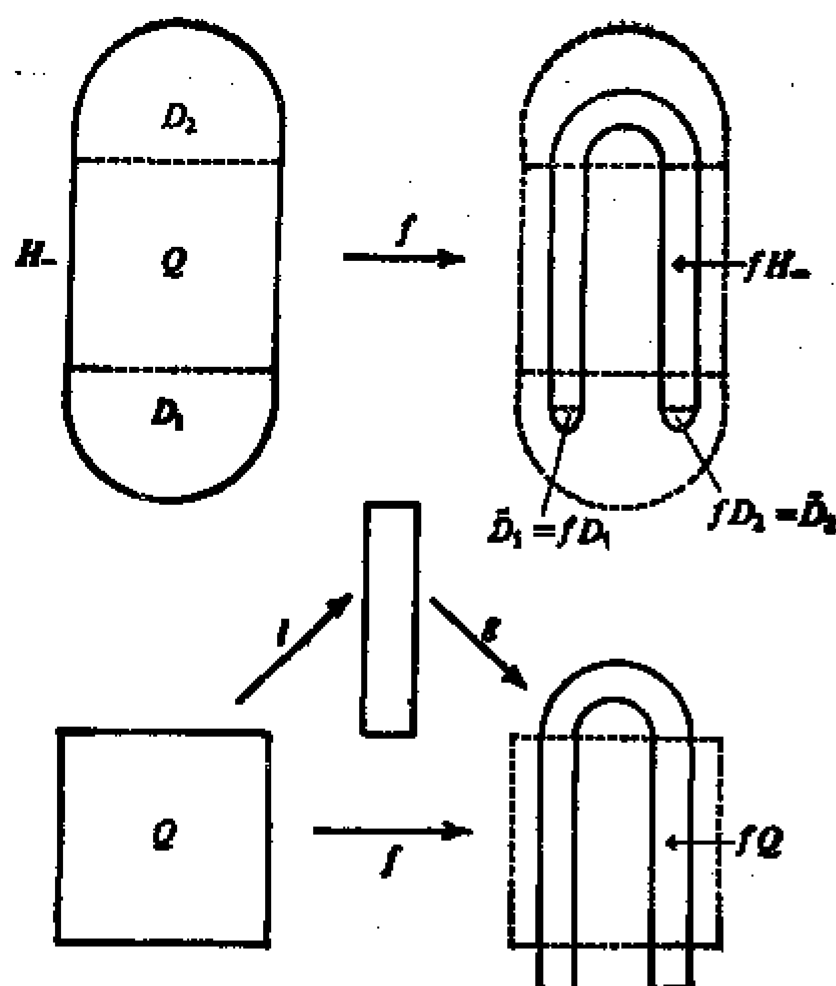


图 46

极我们放上双曲源点 Ω_1, 并且包含赤道的整个北半球 H_+ 属于它的不稳定流形 $W^u(\Omega_1)$. 因此若 H_- 表示南半球, $f(H_-)\subset \operatorname{Int}H_-$. 我们现在叙述 H_- 上的 f, 映射 l 是线性的, 它用压缩因子. $0<\lambda<\frac{1}{4}$ 压缩水平线以及用扩张因子 $\mu>4$ 扩张垂直线, 映射 g 把矩形 $l(Q)$ 中间的一块拧成马蹄 F 且把它移放到在图 46 中所表示的位置, 于是 $Q\cap fQ$ 有两个矩形分支 $\tilde{R}_1$ 与 $\tilde{R}_2$, 它们是矩形 R_1 和 R_2 在 Q 中的象. 在矩形 R_1 与 R_2 中微分同胚 f 是仿射(一线性映射与一平移组成), 以 λ 压缩水平线, 以 μ 扩张垂直线. 最后在圆盘 $\tilde{D}_1=fD_1$ 的中心我们放置一双曲吸引不动点 Ω_3, 且 $\tilde{D}_1\subset W^s(\Omega_3)$. 我们来分析集合 $\Omega=\Omega(f)$, 若 $x\in H_+$, 且 x 不是北极, 那末 x 是游荡的, 因为它所于源点的不稳定流形. 若 $x\in\tilde{D}_1$ 以及 $x\neq\Omega_3$, 则 x 是游荡的, 因为它属于渊点的稳定流形. 若 $x\in D_1$, 那末 $f(x)\in\tilde{D}_1$ 并且 x 是游荡的. 若 $x\in D_2$, 那末 $f(x)\in D_1$,

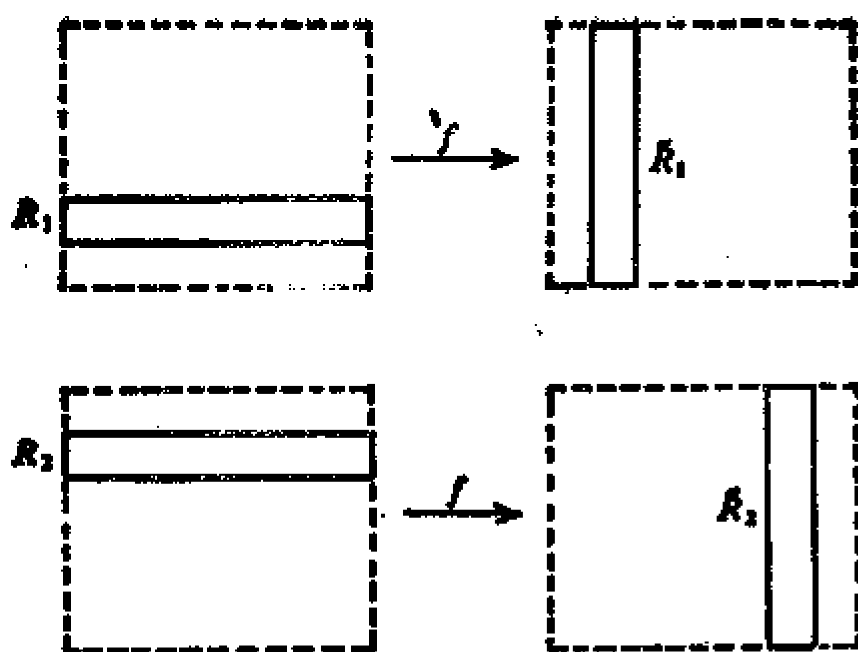


图 47

而且 x 亦是游荡的. 总而言之得, 当 $x\in H_-$ 以及 $x\neq\Omega_3$ 时只有 x 的轨道整个包含于 Q, x 方能是非游荡的. 因此, 若 $x\in\Omega$, 但 $x\neq\Omega_1$ 以及 $x\neq\Omega_3$, 则我们有

$$x\in\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}f^nQ=\Lambda,$$

我们现在来描述集合 Λ. 因为 $Q\cap fQ$ 有两个矩形分支, 所以 $Q\cap fQ\cap f^2Q$ 有四个矩形分支, 等等. 简要地, 我们有

$$Q;$$
$$Q\cap fQ=\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2;$$
$$Q\cap fQ\cap f^2Q=\tilde{R}_{11}\cup\tilde{R}_{12}\cup\tilde{R}_{21}\cup\tilde{R}_{22}$$

等等, 将下标字用如下方法附在矩形上:

$$f\tilde{R}_1\cap Q=\tilde{R}_{11}\cup\tilde{R}_{12}$$

而 $$\tilde{R}_{11}\subset\tilde{R}_1,\ \tilde{R}_{12}\cap\tilde{R}_1=\varnothing.$$

类似地, $$f\tilde{R}_2\cap Q=\tilde{R}_{21}\cup\tilde{R}_{22}$$

而 $$\tilde{R}_{21}\cap\tilde{R}_2=\varnothing,\ \tilde{R}_{22}\subset\tilde{R}_2.$$

一般地 $$R_{\sigma_1\cdots\sigma\sigma_p\sigma_{p+1}}\subset f\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p},$$

若 $\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p\sigma_{p+1}}\subset\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p}$, $\sigma_{p+1}=\sigma_p$; 若它们不相交则 $\sigma_{p+1}\neq\sigma_p$. 这里每一 σ_i 为 1 或 2. 我们指出给定任何整数 $k>0$. $\tilde{R}_1\supset\tilde{R}_{11\cdots1}$,

其中下标1重复k次. 即

$$\widetilde{R}_{11\cdots 1}\subset f^k\widetilde{R}_1\cap Q$$

且特别地

$$f^k\widetilde{R}_1\cap\widetilde{R}_1\neq\varnothing.$$

对于$\widetilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}$, 其中每一$\sigma_i$可以是1或2, 有同样的结论. 考虑任一水平线$\alpha$, 使得$\alpha\cap Q\neq\varnothing$. 且设$[a, b]=\alpha\cap Q$. 则$[a, b]\cap fQ$是两条闭的线段, 并且是从$[a, b]$中去掉三条不相交的线段得到的. 从这两条线段的每一条再移去三条线段, 形成$[a, b]\cap fQ\cap f^2Q$, 等等. 读者将看到

$$[a, b]\cap(\bigcap_{n\geq 0}f^nQ)$$

是一Cantor集. 若我们取一垂直线, 同理可得这直线与

$$\bigcap_{n<0}f^nQ$$

的交集也是Cantor集. 因为f是仿射的, 所以

$$\Lambda=\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}f^nQ$$

是Cantor集, 它是在水平线中一个Cantor集与在垂直线中另一个Cantor集的积. Λ的双曲性是显然的: 垂直线段在f下用比1大的比扩张映到垂直线段; 对称地, 水平线段仍映到水平线段且它是压缩的. 现取$x\in\Lambda$且设R是在Q中的矩形, 它的两条垂直边的高度与Q的一样, 且$x\in R$. 我们指出, 不管R的宽度如何小, 它总包含矩形$\widetilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}$中的一个. 这是因为$\Lambda$含于一切矩形$\widetilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}$的交集中. 我们来证明$x\in\Lambda$是非游荡集. 设$Q_x\subset Q$是包括$x$为内点的正方形, 设$N$是正整数, 我们将证明, 对于某个$n>N$, 有$f^nQ_x\cap Q_x\neq\varnothing$. 因为$f$扩张垂直线段, 所以存在一个整数$m\geq 0$, 使$f^mQ_x\cap Q$包含高度等于原始方形$Q$的矩形$R_{f^m(x)}$. Λ在f下不变, 因此$f^m(x)\in\Lambda$, 故存在一矩形$\widetilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}\subset R_{f^m(x)}$. 如同我们已经指出的, 可以选取整数$k>N+m$, 使得

$$f^k\widetilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}\cap\widetilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}\neq\varnothing.$$

这推出

$$f^kR_{f^mx}\cap R_{f^mx}\neq\varnothing.$$

因而

$$f^nQ_x\cap Q_x\neq\varnothing$$

其中$n=K-m>N$. 这证明任意$x\in\Lambda$是非游荡的. 接着, 我们

来证明，f 的周期点在 Λ 中稠．事实上，根据前面的推证，对于任意 $x\in\Lambda$ 以及任一包含 x 的方形 Q_x，对于某个大的 n，我们有

$$f^nQ_x\cap Q_x\neq\varnothing.$$

映射 f^n 线性地收缩 Q_x 的水平边与扩张垂直边，由扩张性，我们推出在 Q_x 中存在一水平线段 l_h 使得 $f^nl_h\subset l_h$，由压缩性，我们推出在 Q_x 中存在一垂直线段 l_v，使得 $f^nl_v\supset l_v$．于是 $l_h\cap l_v$ 是 f^n 的不动点，即 f 的周期点．这就证明了周期点在 Λ 中稠密．在我们能称 Λ 为基集之前，仅剩下要证存在在 Λ 中稠密轨道．按照我们在定义基集时所给的准则，为使在 Λ 中有传递性，要求任意二个周期轨道的稳定与不稳定流形有非空的交集就足够了．但在这个例子中，正好出现这性质，这是因为，稳定流形包含水平线段而不稳定流形包含垂直线段，它们都横穿正方形 Q．我们得到 f: $S^2\to S^2$ 的基集是 Ω_1, $\Omega_2=\Lambda$, Ω_3．匀断条件是显然成立的，因为 Ω_1 是排斥不动点，Ω_3 是吸引不动点，于是 f 满足公理 A 与匀断条件．

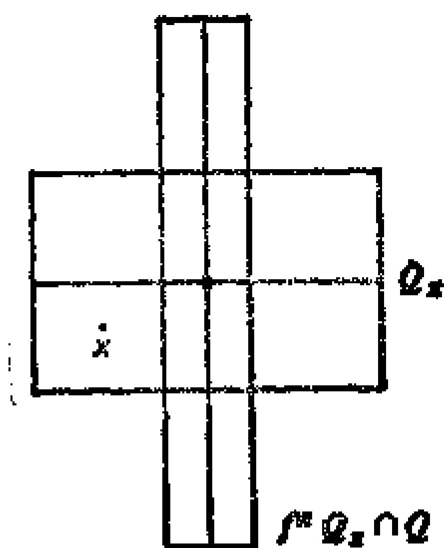


图 48

我们指出，类似于马蹄的构造亦可以在比 2 大的维数的情况下作出来[108],[66],[70],[72]．

例 5．我们来描述环面 T^2 上满足公理 A 与匀断条件的 C^∞ 微分同胚的另一个简单例子，它是由 Smale 给出的(见[109]，[122])，称为 DA 微分同胚，意思是指由 Anosov 微分同胚诱导出来的微分同胚．它的非游荡集是双曲的，由两个基集组成；一个排斥的不动点与一个一维吸引子，它局部同胚于一个区间与 Cantor 集的积．

我们从 Anosov 微分同胚 g: $T^2\to T^2$ 着手，g 是由 $\mathbb{R}^2$ 的线性自同构 L 经过自然投影 π: $\mathbb{R}^2\to T^2$ 导出的，设 v^s 与 v^u 是 L 的收缩与排斥的特征向量，设 e^s 和 e^u 是由 $e^s(\pi(x))=d\pi(x)v^s$ 以及

$e^u(\pi(x))=d\pi(x)\cdot v^u$ 所定义的 T^2 上向量场. 在 T^2 上我们考虑 Riemann 度量, 关于它, 对每一 $p\in T^2$

$$\{e^s(p),\ e^u(p)\}$$

是 $T(T^2)_p$ 的标准正交基, 于是

$$dg(p)\cdot e^s(p)=\lambda e^s(g(p))$$

以及
$$dg(p)\cdot e^u(p)=\mu e^u(g(p)),$$

这里 λ 与 $\mu=\frac{1}{\lambda}$ 是 L 的特征值. 我们提出, e^s 与 e^u 是 C^∞ 的向量场, 它们的轨道, 分别作为稳定与不稳定叶层的叶在 T^2 中稠密. 我们现在来讨论 T^2 上的一微分同胚 f, 满足如下性质:

(1) 在 g 的不动点 $p_0=\pi(0)$ 的小邻域 U 的余集中, f 等于 g;

(2) f 保持 g 的稳定叶层, 在叶的空间上导出相同映射, 即对每个 $p\in T^2$, 有

$$f(W^s(p))=W^s(g(p));$$

(3) p_0 是关于 f 的排斥不动点;

(4) 若我们定义 $\alpha,\ \beta\colon\ T^2\to\mathbb{R}$ 为

$$df(p)\cdot e^s(p)=\alpha(p)e^s(f(p))$$

和
$$df(p)\cdot e^u(p)=\beta(p)\cdot e^s(f(p))+\mu e^u(f(p)),$$

则
$$\bar{\beta}^2<(\mu^2-1)(\mu-1)^2,$$

此处 $\bar{\beta}=\sup|\beta(p)|$, 对所有 $p\in T^2$. 且在 p_0 的不稳定流形中, 存在 p_0 的邻域 V, 使得, 对某个常数 $\bar{\alpha}$ 和一切 $p\in T^2-V$, 有

$$0<\alpha(p)<\bar{\alpha}<1.$$

在证明存在满足上述四条性质的微分同胚 f 之前, 我们将描述它的动力性质以及证明它满足公理 A. 设 L_0 表示过不动点 p_0 的 g 的稳定叶层的叶片, 由性质(3), (4), f 在 L_0 上的限制在 p_0 附近是扩张, 在 L_0-V 上收缩, $V\subset W^u(p_0,f)$. 由此, f 在 $L_0-\{p_0\}$ 的每一连通分支中有且仅有一个不动点, 这些不动点, p_1 和 p_2 是鞍点, 且因为 $L_0-\{p_0\}=W^s(p_1,f)\cup W^s(p_2,f)$, 我们有 $W^s(p_i,f)$ $(i=1,\ 2)$ 在环面上稠密. 若设 $A=T^2-W^u(p_0,f)$, 并

且因为$V\subset W^u(p_0, f)$，则我们推得$\Omega(f)\subset\{p_0\}\cup\Lambda$，且$\Lambda$包含$p_i$的不稳定流形的闭包($i=1, 2$). 我们断言它的逆亦真，并且事实上因为$W^u(p_0, f)$在$T^2$中稠密，所以$\Lambda$是$p_i(i=1, 2)$的同宿点集的闭包. 为了证明此断言，我们首先观察，对于$i, j=1, 2$因为$W^s(p_i)$在T^2中稠，故它与$W^u(p_j)$相交. 因此对于$i, j=1, 2$, $W^u(p_i)$凝聚在$W^u(p_j)$上. 设$p\in\Lambda$，且W是p的邻域，设$I\subset W$是包含在g的某个周期点的稳定流形内的任意小区间. 由于性质(2)，这个包含I的稳定叶层的叶L_1在f的某方幂下仍保持. 因为f^{-1}在V的余集中扩张L_1且L_1是稠的，存在整数n，使得$f^{-n}(I)\cap V\neq\varnothing$，这证明$p$在$W^u(p_0, f)$的闭包内. 但$p$不属于$W^u(p_0, f)$，因此不是$W^u(p_1, f)$与$W$相交就是$W^u(p_2, f)$与$W$相交. 故它们都与$W$相交. 这证明了$W^u(p_0, f)$在$T^2$上稠密且$W^u(p_1, f)$和$W^u(p_2, f)$都在$\Lambda$中稠密. 由$W^s(p_i, f)$的稠密性，如同我们所断言的，$W$包含对应于$p_i$的匀断同宿点. 事实上，不存在$W^u(p_i, f)\cap W$的分支能包含于稳定叶中. 否则，借助于负迭代，沿着稳定叶层，我们得到$W^u(p_i, f)$的局部不稳定流形的部分，这显然是不可能的. 所以，对应于p_i ($i=1, 2$)的同宿轨道在Λ中稠密. 特别地$\Omega(f)=\{p_0\}\cup\Lambda$. 现在我们来证明，$\Lambda$有双曲构造. 对于$a, \rho\in\mathbb{R}$，这里$-1\leqslant a<a+\rho<1$以及$p\in\Lambda$，考虑锥

$$C_p(a, \rho)=\{xe^s(p)+ye^u(p); y\neq 0 \text{ 以及 } a\leqslant x/y\leqslant a+\rho\}.$$

由性质(4)知，通过df_p，$C_p(a, \rho)$的象是圆锥$C_{f(p)}(a', \rho')$，其中$a'=(\alpha(p)/\mu)a+\beta(p)$与$\rho'=(\alpha(p)/\mu)\rho$. 因为

$$(\alpha(p)/\mu)<\bar{\alpha}/\mu<1,$$

我们有
$$\bigcap_{n\geqslant 0} df^n_{f^{-n}(p)}(C_{f^{-n}(p)}(-1, 1))$$

是一维子空间$E^u_p\subset T(T^2)_p$. 显然，$df_p(E^u_p)=E^u_{f(p)}$. 于是，对每$p\in\Lambda$，我们在p上有T^2的切空间的分解

$$E^s_p\oplus E^u_p,$$

其中E^s_p是由$e^s(p)$生成的子空间. 如此的分解在f的导数下是不变的，且E^s被α收缩剩下要证df_p一致地扩张E^u_p中的向量.

为此，我们来估计子空间 E_p^u 的斜率. 设

$$v=xe^s(p)+ye^u(p)$$

是在 E_p^u 中的向量，设

$$v_n=df_p^{-n}v=x_ne^s(f^{-n}(p))+y_ne^u(f^{-n}(p)).$$

由 E_p^u 的定义，我们得到，对一切 $n\geqslant 0$，有

$$|x_n/y_n|\leqslant 1.$$

另一方面
$$\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}=\frac{\alpha(f^{-n}(p))}{\mu}\cdot\frac{x_n}{y_n}+\frac{\beta(f^{-n}(p))}{\mu},$$

因为
$$v_{n-1}=df(f^{-n}(p))\cdot v_n.$$

于是，对一切 $n\geqslant 1$，有

$$\left|\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right|\leqslant\frac{\bar{\alpha}}{\mu}\left|\frac{x_n}{y_n}\right|+\frac{\bar{\beta}}{\mu}.$$

经归纳，对一切 $n\geqslant 1$，我们推得

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{y}\right|&\leqslant\left(\frac{\bar{\alpha}}{\mu}\right)^n\left|\frac{x_n}{y_n}\right|+\frac{\bar{\beta}}{\mu}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\bar{\alpha}}{\mu}\right)^i\\&\leqslant\left(\frac{1}{\mu}\right)^n\left|\frac{x_n}{y_n}\right|+\frac{\bar{\beta}}{\mu}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)^i\\&=\left(\frac{1}{\mu}\right)^n\left|\frac{x_n}{y_n}\right|+\frac{\bar{\beta}}{\mu}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\mu}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{\mu}\right)}.\end{aligned}$$

因此，
$$\left|\frac{x}{y}\right|\leqslant\bar{\beta}/(\mu-1).$$

现在我们证明 df_p 在 E_p^u 上一致地扩张向量. 设

$$v=xe^s(p)+ye^u(p)$$

是 E_p^u 中向量以及设

$$\tilde{v}=\tilde{x}e^s(f(p))+\tilde{y}e^u(f(p))$$

是它在 df_p 下的像. 由性质(4)和上面的表示我们有

$$\begin{aligned}\frac{\|\tilde{v}\|^2}{\|v\|^2}&=\frac{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}{x^2+y^2}\\&\geqslant\frac{\mu^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{\mu^2}{(x^2/y^2)+1}\geqslant\frac{\mu^2}{(\bar{\beta}^2/(\mu-1)^2)+1}\\&>1.\end{aligned}$$

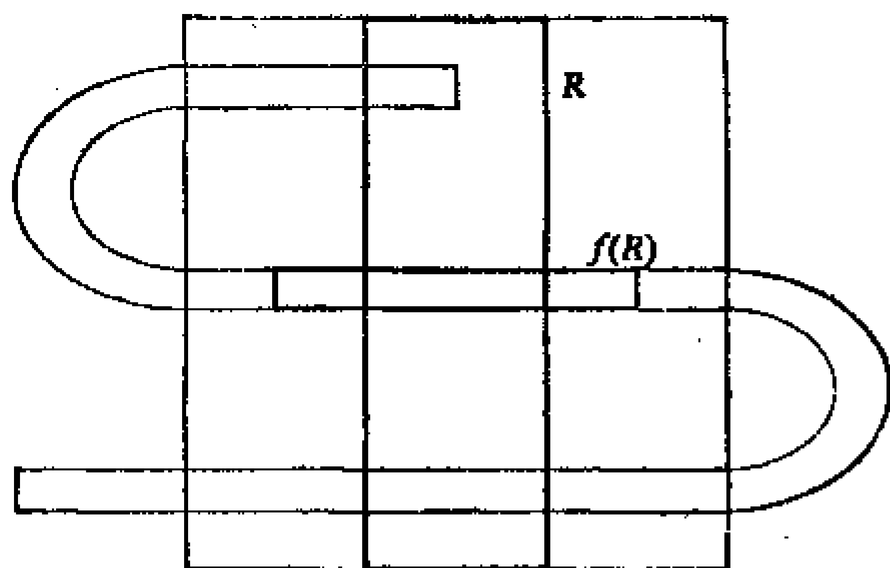


图 49

这就证明了我们的断言. 我们留给读者证实从 E^s 和 E^u 是连续的(见练习 44). 我们来证明周期轨道在 Λ 中稠密. 这个事实可从上面证明的匀断同宿轨道的稠密性以及 Birkhoff 定理得到, 后者为, 这种同宿轨道是由周期轨道凝聚起来的. 然而, 我们将提出如下的通常被称为 Anosov 封闭性引理的有启发性的证明. 设 $p \in \Lambda$ 及 W 是 p 的邻域, 设 $R \subset W$ 是以 p 为内点的闭矩形. 它的边由四条线段组成: I_1 和 I_2 包含在稳定叶之中, J_1 和 J_2 与稳定叶层匀断相交. 稳定叶与 R 的交集的每一连通分支是一线段, 我们称它为 R 的稳定纤维. 因为 $p \in \Lambda$, 所以对无限多个 $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(R)$ 与 R 相交. 对于充分大的 n, $f^{-n}(R)$ 是非常长(在稳定的方向上)又非常细的矩形, 由包含在稳定叶中的线段纤维化. 我们能假定 $f^{-n}(R) \cap R$ 是连通的, 否则, 我们能在稳定方向中使 R 缩拢, 如图 49 所示. 因此, 我们可以找到 R 以及 $n \in \mathbb{N}$, 使得对任意的稳定纤维 $I \subset R$, $f^{-n}(I)$ 包含 R 的一稳定纤维. 若 I_x 表示过 $x \in J_1$ 的稳定的纤维, 那末 $f^{-n}(I_x)$ 交 J_1 于点 $\sigma(x)$, 因为 σ: $J_1 \to J_1$ 是连续的, 所以, 它有不动点 y, 即 $f^{-n}(I_y)$ 包含 I_y. f^n 在区间 $f^{-n}(I_y)$ 的限制是到 I_y 的满连续映射, 因而有不动点 q. 于是, 我们在 W 中找到了 f 的周期点, 利用上面例 4 中的同样的准则, 读者能证明在 Λ 中存在稠密轨道. 我们指出, Λ 包含点 p_i $(i=1, 2)$

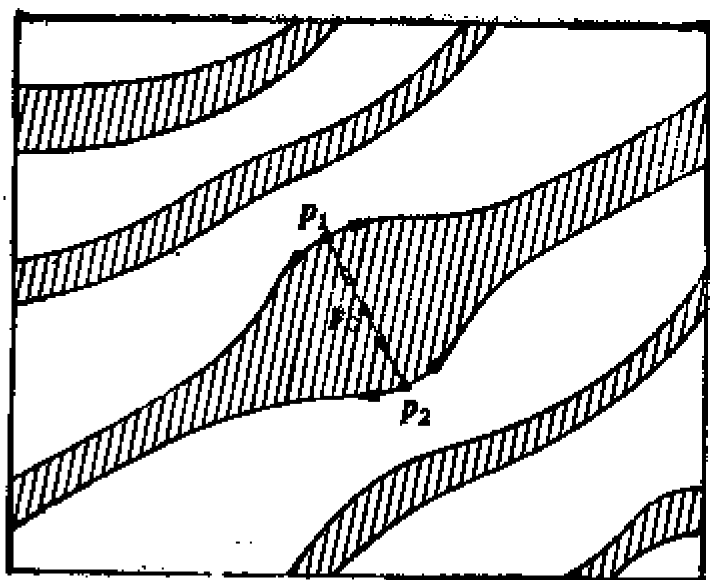


图 50

的一维不稳定流形(事实上，它包含任一点 $p\in\Lambda$ 的不稳定流形)，匀断地，沿着稳定叶层，Λ 局部包含 Cantor 集．设 $p\in\Lambda$ 以及设 I 是沿着过 p 点的稳定叶的小区间，使得 $\partial I\subset W^{u}(p_0, f)$．最后，我们证明存在微分同胚 f: $T^2\to T^2$ 满足一开始叙述的四个性质．设 U 是 p_0 的邻域以及 φ: $U\to\mathbb{R}^2$ 是局部坐标卡，它的逆由

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2)=\pi(x_1v^s+x_2v^u)$$

给出，其中 v^s, v^u 是 L 的单位特征向量．则我们有

$$\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}(x_1, x_2)=(\lambda x_1, \mu x_2).$$

设 ψ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 函数使得 $\psi(\mathbb{R})\subset[0, 1]$；对一切 t, $\psi(-t)=\psi(t)$ 而对 $|t|\leqslant\frac{1}{8}$, $\psi(t)=1$, 当 $|t|\geqslant\frac{1}{4}$ 时, $\psi(t)=0$ 而当 $t'\geqslant t\geqslant 0$ 时, $\psi(t')\leqslant\psi(t)$．在 U 的余集上，令 $f=g$ 以及 $f=\varphi^{-1}\circ F\circ\varphi$, 其中

$$F(x_1, x_2)=(F^1(x_1, x_2), F^2(x_1, x_2))$$
$$=(\lambda x_1+(2-\lambda)\psi(x_2)\psi(kx_1)x_1, \mu x_2).$$

在这表示式中，选正实数 k, 使得对一切 $x=(x_1, x_2)$,

$$|(\partial F^1/\partial x_2)(x)|<(\mu-1)\sqrt{\mu^2-1}.$$

显然，原点是 F 的排斥不动点．剩下要证明存在原点的邻域 $W\subset\varphi(U)$, 使得 W 包含在不稳定流形 $W^u(0, F)$ 中以及

$$\sup_{x\in W}(\partial F^1/\partial x_1)(x)=\bar{\alpha}<1.$$

因为 φ 是等距的，所以在构造 W 以后，我们正好取 $V=\varphi^{-1}(W)$。设

$$J_t=\{s;\ (\partial F^1/\partial x_1)(s,\ t)\geqslant 1\}$$

以及
$$I_{x_2}=\{(x_1,\ x_2);\ x_1\in J_{x_2}\}.$$

我们有 $J_t\subset J_{t'}$，只要 $t\geqslant t'\geqslant 0$，且 J_t 或是空的或是对称的区间. 记 $J_t=[-a_t,\ a_t]$. 对一切 $x_1\in J_{x_2}$ 有

$$\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\right)(x_1,\ x_2)\geqslant 1$$

以及
$$F^1(-x_1,\ x_2)=-F^1(x_1,\ x_2),$$

因而 $F^{-1}(I_{x_2})$ 是对称区间，它的长小于或等于 I_{x_2} 的长. 因此 $F^{-1}(I_{x_2})$ 包含在 $I_{(1/\mu)x_2}$ 中，显然 $I_0\subset W^u(0,\ F)$. 因而，对小的 x_2，$I_{x_2}\subset W^u(0,\ F)$. 于是，对一切 $x_2\in[-1,\ 1]$，因为 $F^{-1}(I_{x_2})\subset I_{(1/\mu)x_2}$，有 $I_{x_2}\subset W^u(0,\ F)$. 因为对 $x_2\in[-1,\ 1]$ 区间 I_{x_2} 的并是紧集以及 $W^u(0,\ F)$ 是开的，所以存在 $0<\bar{a}<1$，使得

$$W=\left\{(x_1,\ x_2);\ \left(\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\right)(x_1x_2)>\bar{a}\right\}$$

是在 $W^u(0,\ F)$ 中 0 的邻域. 可直接验证，$f=\varphi^{-1}\circ F\circ\varphi$ 满足上面所列的性质(1)到(4)注意，我们取 $V=\varphi^{-1}(W)$ 作为性质(4)中所述的邻域. 故我们在环 T^2 上构造了 DA 微分同胚.

注 1. 设 p_1 是上面所研究的 Anosov 微分同胚 g 的另一个周期点，我们能在 p_0 和 p_1 的邻域中同时修改 g，以便得到微分同胚 f，f 满足公理 A，它具有由三个基集组成的非游荡集：一个排斥不动点 p_0，一个排斥的周期轨道 $\mathcal{O}(p_1)$ 以及一个非周期吸引子 Λ. 我们沿着 g 的不同的周期点作出同样的构造，就能得到非共轭的双曲吸引子的一些例子(给定周期的周期轨道的个数可能是不同的…).

注 2. 用同样的方法可以去构造高维系统中公理 A 吸引子，我们从具有一维稳定流形的 Anosov 微分同胚着手，并象上面那样修改.

例 6. 我们现在证明，即使对于球面 S^2 亦可构造具有非周期

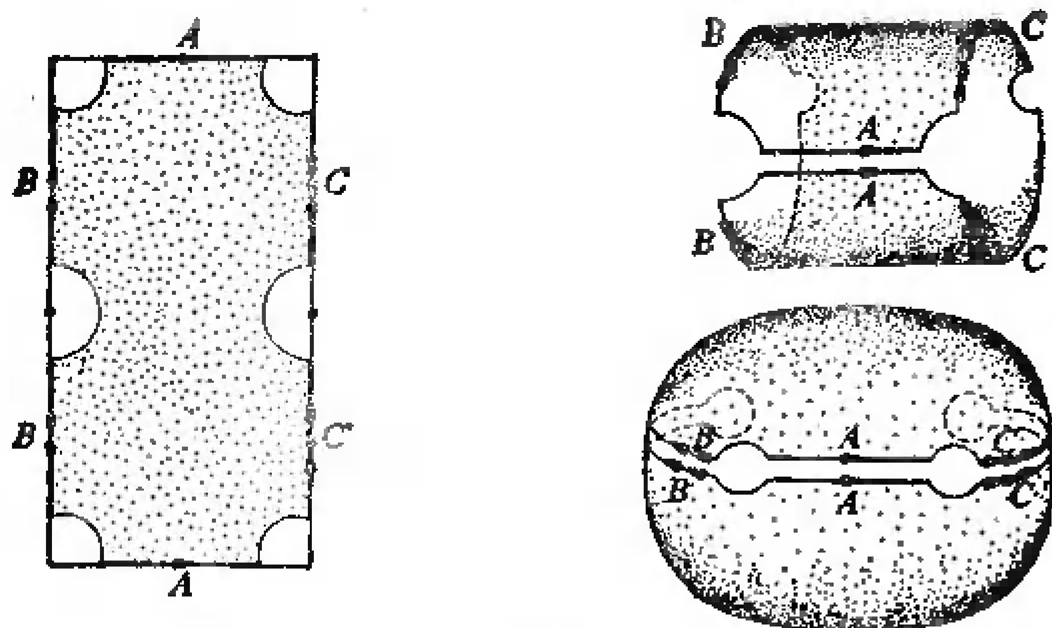


图 51

的吸引子的公理 A 微分同胚，这个结果是由 Plykin 得到的(见参考文献[5]，内有一精巧的图)．设Φ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一对合，$\Phi(x)=-x$．因为$\Phi(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$，$\Phi$ 导出 $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 的对合 η．我们指出 η 有四个不动点 $p_0=\pi(0,\ 0)$，$p_1=\pi\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$p_2=\pi\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$与 $p_3=\pi\left(0,\frac{1}{2}\right)$．设 V_i 是点 p_i $(0\leqslant i\leqslant 3)$ 的小胞腔邻域，使得 $\eta(V_i)=V_i$ 以及设 $N=T^2-\cup V_i$．η 对 N 上的限制是无不动点的对合．设～是 N 上的等价关系，只要两个点属于 η 的相同轨道就等价．设 M 是商空间 $N/\sim$ 以及 ρ: $N\to M$ 是标准投影．借助于 ρ，从 N 上导出 M 上的微分构造，我们可证明：M 与球面 S^2 上的四个不相交的圆盘的余集微分同胚．M 对应图 51 中所示的对应边恒同的阴影区域．ρ 是双叶覆盖映射，即 ρ 是带有每点有两个原像的局部微分同胚．因此，若 $\bar{f}$: $N\to N$ 是可微映射，使得 $\bar{f}\eta=\eta\bar{f}$，那末它导出可微映射 f: $M\to M$，使得 $\rho\bar{f}=f\rho$．如同例 5(见注 1)，我们能在环面上构造 DA 微分同胚 $\bar{f}$，它以 p_0 为排斥不动点以及以 $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ 为排斥周期轨道(周期为 3)，而且易看出，我们可构造 $\bar{f}$，使得 $\bar{f}\eta=\eta\bar{f}$，因为我们能从一 Anosov 微分同胚 g 着手，g 是由线性自同构导出的，因此它与 η 可交换．例如，从 T^2 上由 $\mathbb{R}^2$ 的线性同构 L 导出的微分同胚着手，其中 L 在标准坐标下由

$$L(x_1, x_2)=(2x_1+x_2, x_1+x_2)$$

给出．取点 p_i 的闭邻域 V_i，使得 $\eta(V_i)=V_i$，V_i 包含在 p_i 的不稳定流形中，其中 $0\leqslant i\leqslant 3$．我们得到，$\tilde{f}$ 是从 $N=T^2-\bigcup_i V_i$ 到 $\tilde{f}(N)\subset N$ 上的微分同胚，且 $\tilde{\Lambda}=\bigcap_{n>0}\tilde{f}^n(N)$ 是 DA 吸引子．于是，$\tilde{f}$ 导出了微分同胚 $f: M\to f(M)\subset M$．在 M 的补的四个小圆盘中，每一个放置一个源，且其中一个是周期为 3 的周期轨道，我们能扩张 f 到球面 S^2．于是，不难看到，$\Omega(f)$ 是由这些排斥不动点和周期轨道以及 $\Lambda=\rho(\tilde{\Lambda})$ 所组成，其中 Λ 是一维吸引基集．后一结论可由 ρ 是双叶覆盖以及 $\rho\tilde{f}=f\rho$ 得到．

现在我们来给出满足公理 A 和匀断条件的微分同胚关于结构稳定性的结果．设 $\mathscr{A}^r(M)\subset \mathrm{Diff}^r(M)$ 是紧致流形 M 上所有这些微分同胚组成的子集．首先，Robbin[92],[93] 证明了任一 $f\in\mathscr{A}^2(M)$ 是结构稳定的．以后，在[61] 中证明了对 $f\in\mathscr{A}^1(M^2)$ 有同样结果．而当 M 是任意维数时，微分同胚 $f\in\mathscr{A}^1(M)$ 的稳定性问题并未解决．但这亦被 Robbinson 以肯定的回答解决了[97]，他在[95]，[96]中证明了关于向量场的相应的结果．

一个仍然没有一般结果的重要的问题，是上面结果的逆：若 f 是结构稳定的，它是否满足公理 A 与匀断条件？在特殊情况下，即 $\Omega(f)$ 是有限的，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是结构稳定的当且仅当 f 是 Morse-Smale 的[79]，在 $\Omega(f)$ 不是有限的一般情况下，部分结果由 Pliss[80] 与 Mañé[53] 得到．Mañé[54] 应用很有创见的想法，新近解决了二维流形的问题1)．在这方向另一结果是由 Franks[21]，

1) 我国的廖山涛教授早在六十年代初就从事微分动力系统的理论研究工作，他提出典范方程组与阻碍集的理论。应用这些理论，他最早给出了 C^1 封闭性引理的严格的概念性的证明，最先解决了关于 $n=2$ 的微分同胚的稳定性推测，这项工作发表于 1980 年（见 Chinese Annals of Math **1**(1980)，9—70)；以后 Mañé 于 1982 年也得到相同的结果。新近廖山涛教授又解决了关于 $n=3$ 的微分同胚的结构稳定性推测（见廖山涛，紧致微分流形上常微分方程系统的某类诸态备经性质，北京大学学报(自然科学，**9**(1963) 241—265，309—324；廖山涛，典范方程组，数学学报，**17**(1974)，100—109，175—196，270—295；廖山涛，阻碍集与强匀断条件，数学学报，**19**(1976)，203—209；廖山涛，阻碍集(I)数学学报，**3**:**23**(1980)，411—

Guckenheimer[36] 以及 Mañé[52] 给出的．他们引进了下面的概念，由此他们得到了类似于我们刚刚系统阐述的结构稳定性的某种稳定性的特征．我们说，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$是绝对稳定的，只要存在邻域$V(f)\subset \mathrm{Diff}^r(M)$以及数$K>0$使得对每一$g\in V(f)$，存在$M$上的同胚$h$，有

$$hf=gh$$

以及
$$\|h-I\|_0\leqslant K\|f-g\|_0$$

在这表示中，I是M的恒同映射，$\|\ \|_0$表示C^0距离．已经证明：若$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$是绝对稳定的，则f满足公理A和匀断条件．Franks 从微分同胚$f\in \mathscr{A}^r(M)$的结构稳定性的证明中还观察到这些微分同胚是绝对稳定的．同时，我们还能说，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$是绝对稳定的当且仅当$f\in \mathscr{A}^r(M)$．

在研究微分同胚和流的（结构）稳定性中，人们特别注意去讨论限制在非游荡集上的稳定性．推动这方面研究的动机是基于系统的动力性最终集中到非游荡集上．一切极限集，特别地，周期和回复轨道都位于此．我们说，$f\in \mathrm{Diff}^r(M)$是Ω稳定的，只要存在领域$V(f)\subset \mathrm{Diff}^r(M)$，使得对任$g\in V(f)$，存在同胚$h:\Omega(f)\to\Omega(g)$，对一切$x\in\Omega(f)$，有

$$hf(x)=gh(x).$$

这里一个重要的概念是非游荡集中的环．设f满足公理A，又设$\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_k$是$\Omega=\Omega(f)$对于基集的分解．$\Omega$中的环是点$p_1\in\Omega_{k_1}$，$p_2\in\Omega_{k_2}\cdots p_{k_s}\in\Omega_{k_s}=\Omega_{k_1}$的序列，使得对$1\leqslant i\leqslant s-1$，有

$$W^s(p_i)\cap W^u(p_{i+1})\neq\varnothing.$$

453；廖山涛，阻碍集(II)，北京大学学报(自然科学)，2(1981)，1—36；廖山涛，一个推广的C^1封闭引理，北京大学学报(自然科学)，3(1979)，1—20；Liao Shantao(廖山涛)，On the Stability Conjecture, *Chin. Ann. of Math* 1(1)(1980)，9—30；Liao Shantao, On Characterizations of Structural Stability, *Applied Mathematics and Mechanics*, 5:6(1984)，1745—1750；Liao Shantao Standard Systems of Differential Equations and Obstruction Sets with Applications to Structural Stability Problems 1983年"双微"北京讨论会文集，科学出版社，1986.)

在[110]中，Smale证明了若f满足公理A和$\Omega(f)$中没有环，那末f是Ω稳定的．对应于向量场的这个结果是由Pugh与Shub得到的[91]．稍晚Newhouse[69]证明了，对Ω的稳定性，要求在极限集上的双曲性与无环性就足够了．最近，Malta[50][51]把双曲性减弱为仅要求对Birkhoff中心满足这些条件，Birkhoff中心是作为同时是α与ω-回复的轨道的闭包定义的．已经知道，若f满足公理A以及在$\Omega(f)$上存在环，那末f不Ω稳定[70]．剩下的问题：若f是Ω稳定的，它是否满足公理A？对于Ω稳定性，存在类似于上述的刻划结构稳定性的结果．

自然要问：是否结构稳定的微分同胚和向量场在$\mathrm{Diff}^r(M)$与$\mathscr{X}^r(M)$中稠密(因而开且稠)？对于这个问题的第一个反例已由Smale给出[111]．Ω稳定性也不是通有的，它通过Abraham-Smale[2]，Newhouse[68]，Shub与Williams[104]以及Simon[106]所给出的那些例子得到说明．

一般说来，所有结构稳定系数不在$\mathrm{Diff}^r(M)$或$\mathscr{X}^r(M)$中稠密．如我们将要指出的，它们仍是很多的．首先，它们存在于任意的流形上；Morse-Smale微分同胚是典型的例子。此外，Smale[112]证明在$\mathrm{Diff}^r(M)$中每一合痕类中存在稳定的微分同胚，即任意微分同胚能用微分同胚的连续弧被连结到稳定的微分同胚上．另外，有趣的事实是任何微分同胚能用稳定的微分同胚C^0逼近(Shub[102])，因而，在具有C^0拓扑的C^r微分同胚的空间中($r\geqslant1$)，稳定的微分同胚是稠密．在$\mathrm{Diff}^r(M)$中包含Morse-Smale微分同胚的合痕类，由Shub-Sullivan[108]，Franks-Shub[23]分析研究；而在曲面情况下，由Rocha[94]分析研究过．在最后的这一著作中，一个特征是通过基本群上诱导出自同构的趋于零的增长率来描述的．在一给定的合痕类中，对于稳定微分同胚的可能的周期性态的类型在[22]中已被研究过．对于向量场，Asimov[3]在每一具有Fuler示性数为零且维数大于3的流形上构造了没有奇点的Morse-Smale系统．当然，对于二维曲面(环面与Klein瓶)这是可能的．多少令人有点惊奇的是，Morgan[60]证明对于某些三

维流形，这是不可能做到的.

在动力系统中直到目前为止所发现的或许是最重要的通有性质是由 Pugh 给出的. 借助于 Kupka-Smale 定理与他的封闭性引理的结合，Pugh[89] 证明了如下的定理：存在一通有集 $\mathscr{G}\subset \mathrm{Diff}^1(M)$，使得对任意 $f\in\mathscr{G}$，f 的周期点是双曲的，它们在 $\Omega(f)$ 中稠密以及它的稳定与不稳定流形是匀断相交的. 非常重要的问题是 $r\geqslant 2$ 时，在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中同样的结果是否成立. 这个结果通称通有稠密性定理.

应用定义在其非游荡集上的，且在微分同胚下保持不变的测度，对满足公理 A 的微分同胚，特别是 Anosov 微分同胚也进行了研究. 与动力系统有关的，且应用这个工具去描述微分同胚的轨道结构的数学分支称为遍历性理论. 它起源于守恒力学(Conservative Mechanics)，在这里，通常出现的微分同胚具有保体积性质. 满足公理 A 微分同胚的遍历性理论开始于 Anosov, Sinai 与 Bowen 的工作. 读者在[7]，[9]，[10]，[120]中将找到这个理论的叙述.

另一个活跃的研究领域是分歧理论，早在 Poincaré 时，就被几个数学家考虑过. 粗略地说，这个理论是描述当我们考虑初始动力系统扰动时，它的相图(轨道空间)如何能发生改变. 特别地，我们如何在初始系统附近，在拓扑共轭或拓扑等价下去描述等价类的系统. 风格类似的问题还出现在其它数学分支之中，例如，映射的与偏微分方程的奇点(例如，见[17]，[28]，[42]，[99]，[118])，但是在这里我们只考虑有关向量场和微分同胚的分歧的一些讨论上. 一个普遍的观点是去确定当参数变化时依赖于若干参数的系统的相图如何演变. 分歧点就是一些参数值，对于这些参数值，系统在相图中发生拓扑的改变. 在这个方向上，特别是对于单参数族(弧)的向量场与微分同胚，有越来越多的有用的结果，为了说明这个题目的思想，我们将叙述其中的两个结果. 第一个比第二个更为自然. 设 $I=[0, 1]$ 以及 M 是无边的紧流形，我们用 $\mathscr{A}$ 表示向量场 $\xi: I\to\mathscr{X}^r(M)$ 带有 C^∞ 拓扑的 C^∞ 弧空间，其中

$1 \leqslant s \leqslant r,\ r \geqslant 4$. 由通有(第二范畴)向量场是 Kupka-Smale 的事实，我们将期望，对于通有弧 $\xi \in \mathscr{A}$, $\xi(\mu) \in \mathscr{X}^r(M)$, ξ 对于更多的 $\mu \in I$ 值是 Kupka-Smale 的. 若对于某个 $\mu_0 \in I$, $\xi(\mu_0)$ 不是 Kupka-Smale 的，那末 $\xi(\mu_0)$ 的某条周期轨道不是双曲的或某对稳定与不稳定流形非匀断相交. 而且，若弧 ξ 不是"退化的"，要么 $\xi(\mu_0)$ 仅有的一条周期轨道是非双曲的，要么所有周期轨道都是双曲的且仅有一对稳定与不稳定流形确实沿着 $\xi(\mu_0)$ 的某一条轨道非匀断相交. $\xi(\mu_0)$ 的奇点 p 缺乏双曲性是由于 $D\xi(\mu_0)$ 的一个特征值(或一对复共轭特征值)在 p 点有实部零. 闭轨 γ 缺乏双曲性是由于在 $p \in \gamma$ 上 DP 有模为 1 的一个特征值(或一对复共轭的特征值). 这里 P 是过 p 点的截痕上的 Poincaré 映射. 在两种情况下，我们都用 λ 记这些特征值，我们对于 μ_0 附近的 μ, 描述 ξ_λ 的相模型. 为此，我们必须假定关于 $\xi(\mu)$ 的高阶导纲(jets)的一定的非退化条件. 但在这里我们不去叙述它们. 一个极重要的事实，是对于一切 μ_0 附近的 μ, 对于相伴于 λ 的 $\xi(\mu)$ 的不变流形的存在性. 它通常被称为中心流形，且若 λ 是实数，它是一维的，否则它是二维的(见[40]). 本质上，分歧是沿着这中心流形出现的；当与它正交时，我们有双曲性(见[80]). 在下面的图中双曲性是用双箭头表示的.

奇点

(a) $\lambda=0$. 在中心不变直线上，两个鞍点压缩成一个，然后消失了(或反过来也是这样). 这被称为鞍-结分歧.

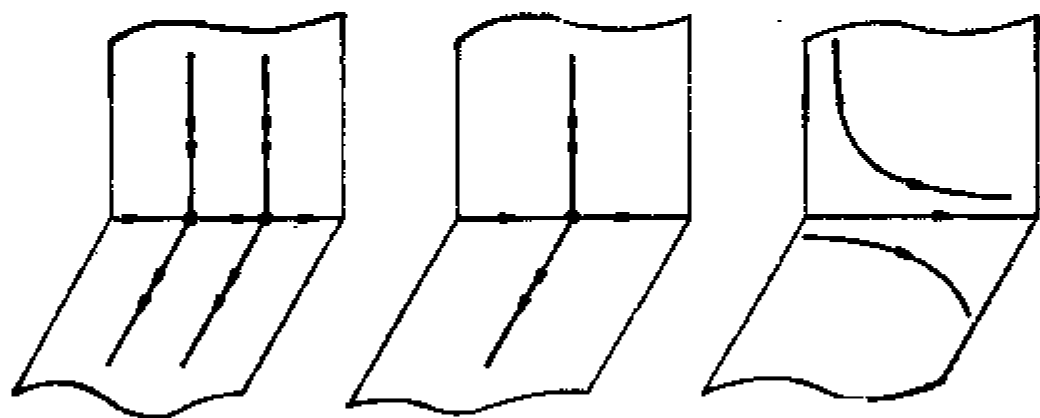


图 52

(b) $\lambda=bi$, $b\neq0$. 在中心不变平面上，双曲吸引奇点变成非双曲的，但仍是吸引的，然后它变成双曲排斥子，且出现了吸引的闭轨，这被称为 Hopf 分歧.

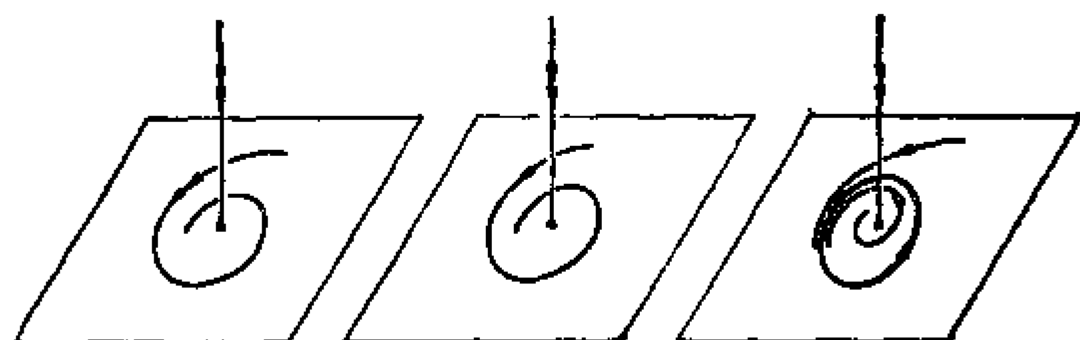


图 53

闭轨　我们把讨论限制到相伴的 Poincaré 映射的相图上.

(a) $\lambda=1$. 这类似于鞍-结奇点. 图中打点号的意思是强调 Poincaré 映射的轨道是离散的.

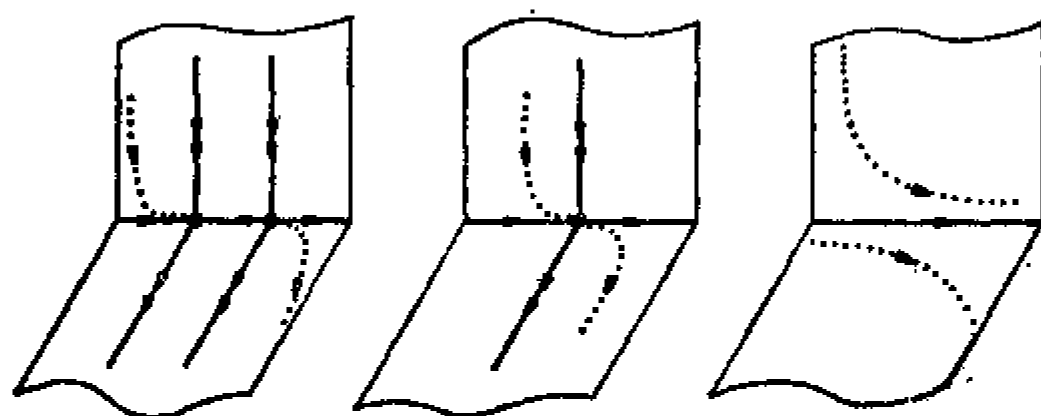


图 54

(b) $\lambda=e^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$. 这类似于关于奇点的 Hopf 分歧. 在分歧以后，出现了在 Poincaré 映射下不变的圆. 这个圆对应于在向量场的流下不变的环面.

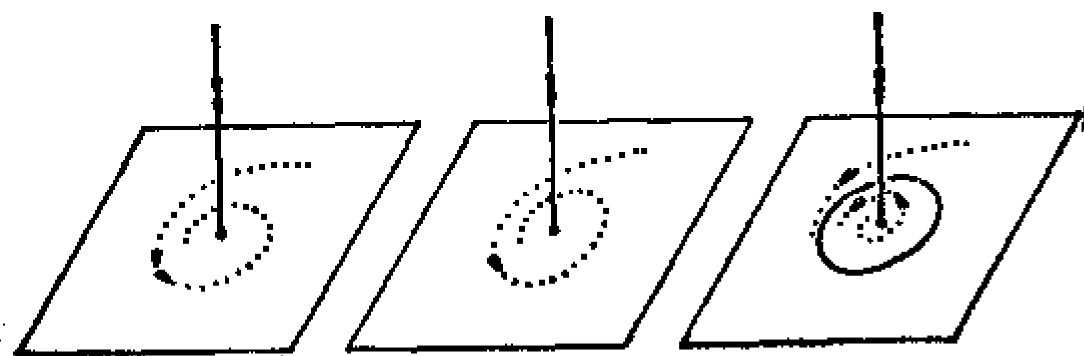


图 55

(c) $\lambda=-1$，在中心不变线上，双曲吸引不动点变成非双曲的，但仍是吸引的，然后它变成双曲排斥子，且出现一个周期为 2 的吸引的周期点．它被称为翻转分歧．

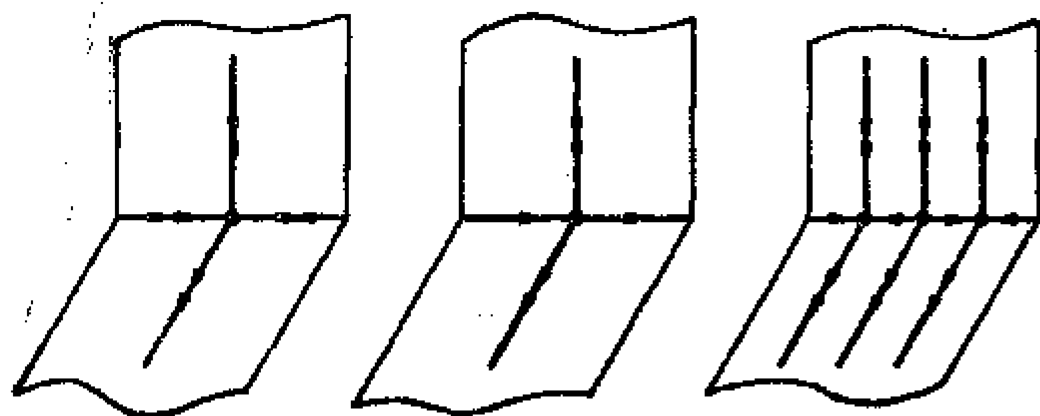


图 56

上述的非双曲奇点和闭轨称为拟双曲的．

对于稳定与非稳定流形的交集上非匀断性轨道，我们要求接触是二阶（二次）的．图 57 表示了二维向量场的两个奇点的稳定与非稳定流形之间（鞍点联结）的二阶接触．图 58 表示，在二维截痕中画出了两条闭轨的鞍点联结．

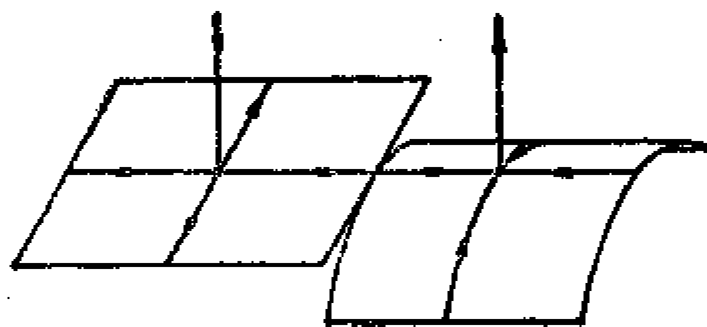


图 57

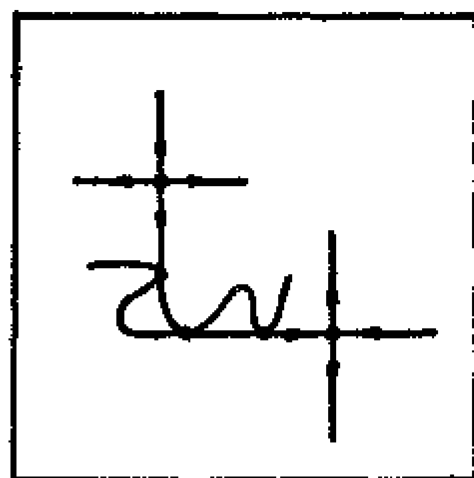


图 58

我们现在能叙述下面的结果，这一结果主要是由 Sotomayor[115] 给出的．它的部分结果曾被一些学者，如 Brunowsky[11] 研究过．存在由弧组成的剩余子集 $\mathscr{A}$，使得若 $\xi\in\mathscr{B}$，那末对于除可数集 $\mu_1,\cdots\mu_n,\cdots$ 外的一切 $\mu\in I$，有 $\xi(\mu)$是

Kupka-Smale 的. 而且, 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 下面两种可能性之一成立. 要么 $\xi(\mu_n)$ 除一条是拟双曲轨道外其它的周期轨道都是双曲的, 且它们的稳定与非稳定流形都是匀断相交的, 要么一切周期轨道是双曲的以及它们的稳定与非稳定流形除在一条轨道二阶接触外都是匀断相交的.

我们来考虑关于向量场弧的稳定性概念, 并且叙述在这一方向上新近得到的结果之一. 两个弧 $\xi, \xi'\in\mathscr{A}$ 是等价的, 只要存在同胚 $\rho: I\to I$, 使得对每个 $\mu\in I$, 在 $\xi(\mu)$ 与 $\xi'(\rho(\mu))$ 之间存在一个等价 h_μ, 而且这里要求同胚 h_μ 连续依赖于 $\mu\in I$. 设 $\mathscr{G}\subset\mathscr{A}$ 表示 M 上梯度场的弧的子集. 下面是即将发表的新近由 Palis 与 Takens 得出的定理: 在 $\mathscr{G}$ 中一个弧的开稠集是稳定的.

关于这个题目的说明, 我们请读者参看 [1], [5], [6], [27], [34], [58], [78], [84], [117].

练　　习

1. 证明 n 维紧流形上每一 Morse-Smale 向量场有一吸引的临界元素与一排斥的临界元素.

2. 设 X 是 n 维紧流形上 Kupka-Smale 向量场. 证明, 若 X 的非游荡集与它的临界元素的并重合, 那末 X 是 Morse-Smale 向量场.

3. 设 $f: M^n\to\mathbb{R}$ 是 C^{r+1} Morse 函数, 即 f 有有限个非退化临界点. 假定两个临界点总有不同的像. 证明关于 $X=\operatorname{grad}f$ 存在一个过滤 (filtration).

4. 设 X 是 n 维紧流形上的梯度场. 证明 X 能被 Morse-Smale 向量场逼近。

5. 我们称可微函数 $f: M\to\mathbb{R}$ 是向量场 $X\in\mathfrak{X}^r(M)$ 的首次积分, 只要对一切 $p\in M$, $df(p)\cdot X(p)=0$. 证明, 若 X 是 Morse-Smale 向量场那末 X 的每一首次积分是常数.

6. 设 M 是 n 维紧流形, 且设 X 是 M 上 C^r 向量场, 具有两个双曲奇点 p, q, 其中 p 是吸引的, q 是排斥的. 假定, 对于一切 $x\in M-\{p, q\}$, x 的 ω 极限是 p, α 极限是 q, 证明 M 与 S^n 同胚.

7. 设 $X\in\mathfrak{X}^r(M^2)$ 是 Morse-Smale 场. 我们称 X 是极场 (Polar field), 如果 X 有且仅有一个源, 一个渊且没有闭轨. 设 $X\in\mathfrak{X}^r(M^2)$ 是一极

场，它具有渊点 p. 又设 C_X 是与 X 匀断相交的圆，以它为边界的圆盘包含 p. 证明，在二维定向流形中，极场 X 与 Y 是拓扑等价的当且仅当存在同胚 $h: C_X \to C_Y$，具有如下性质：$x, y \in C_X$ 属于 X 的某一鞍点的不稳定流形当仅且当 $h(x)$，$h(y)$ 属于 Y 的某一鞍点的不稳定流形. (G. Fleitas).

8．证明环面上的两个极场是拓扑等价的.

9．证明在带有两个环柄的球面(双环面)上存在两个极场，它们不拓扑等价.

10．描述在双环面上极场的一切等价类.

提示，见这一章中第 1 节的例 10.

11．考虑闭圆盘 $D\subset \mathbb{R}^2$，设 C 是它的边界. D 上弦系统是 D 上互不相交的弧的有限集合，其中每条弧联结了 C 上两个点，且在 C 的这些点处与 C 匀断相交. 证明，对于 D 上任一弦系统，存在向量场 X 与 C 匀断相交，且具有如下性质.

(i) 这些弧含于 X 的鞍点的不稳定流形中，且每弧仅包含一个鞍点；

(ii) 这些弧的并集之补的每一连通分支恰包含一个源点；

(iii) C 中点的 α 极限或者是一个源点或者是一个鞍点.

12．设 X 与 Y 分别是圆盘 D_1 与 D_2 上结合练习 11 中的两个弦系统的向量场. 设 $h: \partial D_1\to\partial D_2$ 是一微分同胚，使得，若 $p\in\partial D_1$ 含于 X 的鞍点的不稳定流形中，那末 $h(p)$ 含于 $-Y$ 的渊点的稳定流形中. 用 h 把 D_1 与 D_2 粘在一起，我们得到 S^2 上的场 Z，它在 D_1 上等于 X，而在 D_2 上等于 $-Y$. 证明

(a) Z 是 Morse-Smale 场；

(b) S^2 上每一无闭轨的 Morse-Smale 向量场，拓扑等价于用此构造而得到的向量场.

13．设 X 与 Y 是 S^2 上仅具有一个渊点的 Morse-Smale 向量场，且使

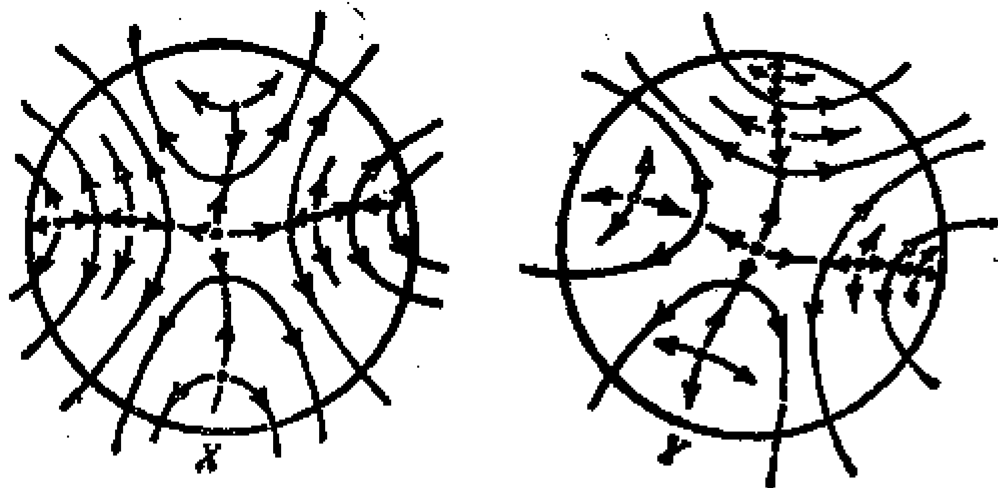


图 59

得在圆盘的补上轨道包含在这个渊点的稳定流形之中，其构造如图 59 所示．证明 X 与 Y 有同构的相图，但不是拓扑等价的．

14．描述 S^2 上具有一个渊点、三个鞍点、四个源点，且没有闭轨的 Morse-Smale 向量场的一切等价类．

15．描述环面 T^2 上具有一个渊点、二个源点、三个鞍点，且无闭轨的 Morse-Smale 向量场的一切等价类．

16．考虑向量场 X，其轨道结构如图 60 所示．X 的非游荡集由源点 f_1 与 f_2，鞍点 s_1 与 s_2 以及渊点 p_1 与 p_2 组成．证明 X 能用具有闭轨的向量场逼近．这说明 X 不是 Ω 稳定的．

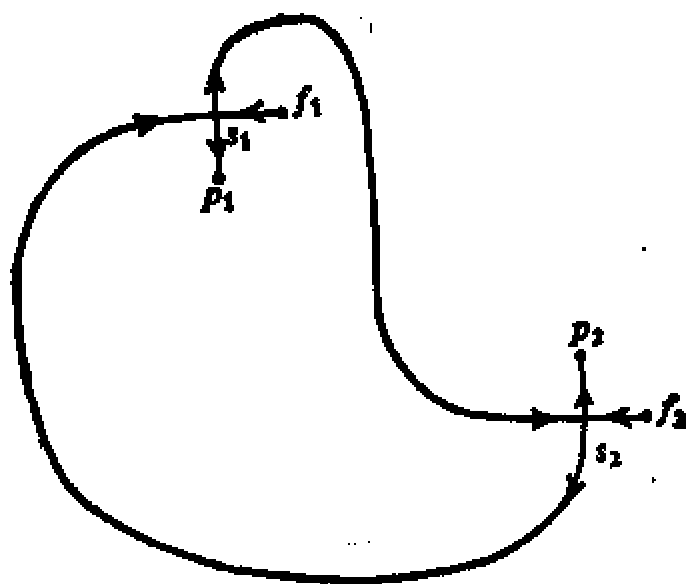


图 60

17．设 X 是 n 维紧流形上具有有限个临界元素的 Kupka-Smale 向量场．证明，若 X 的极限集与它的临界元素集合相合，那末 X 是 Morse-Smale 向量场．

18．若 M^2 不是球面、射影平面以及 Klein 瓶，证明，Kupka-Smale 向量场的集合在 $\mathscr{X}^r(M^2)$ 中不是开的．

提示：利用 Cherry 的例子(本章练习 13)．

19．设 $X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是奇点为双曲的向量场．若 G 是 X 的图(graph)，$p\in M$ 有 $\omega(p)=G$，那末存在 p 的邻域 V，使得对于每一 $q\in V$，有 $\omega(q)=G$．

20．证明，若 M^2 是定向流形，$X\in\mathscr{X}^r(M^2)$ 是结构稳定的，那末 X 是 Morse-Smale 场．并证明，若 M^2 是不可定向的，且 $X\in\mathscr{X}^1(M^2)$ 是结构稳定的，那末X是 Morse-Smale 场

21．证明，若 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 是结构稳定的，且周期点个数有限，那末 f 是

Morse-Smale 的.

22. 设 $\mathscr{X}^r(\mathbf{R}^2)$, $r\geqslant 1$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上具有 Whitney 拓扑的向量场集合(见第一章练习 17). 证明,在 $\mathscr{X}^r(\mathbf{R}^2)$ 中存在结构稳定的向量场.

提示: 考虑平面上的一个三角剖分. 在平面上构造一个向量场, 奇点是三角形的中心,边及顶点.

注. 在[63]中, P. Mendes 证明在任何开流形上存在稳定向量场与微分同胚.

23. 证明, 若 γ 是二维不可定向流形上向量场 X 的非平凡的回复轨道, 那末存在一横截圆与 γ 交于一点 $p\in\gamma$.

24. 证明, 若 $h: S^1\to S^1$ 是逆向的同胚, 那末 h 有不动点.

25. 证明, Klein 瓶上无奇点的向量场仅有平凡的回复轨道.

26. 证明 Morse-Smale 微分同胚的集合在任何二维流形上都不是稠密的.

27. 证明所有 Morse-Smale 向量场的集合在任何维数大于或等于三的流形上不是稠密的.

28. 证明, 若微分同胚或向量场的极限集由有限条轨道组成, 那末它的 Birkhoff 中心由(有限多个)奇点与闭轨组成. (Birkhoff 中心就是同时是 α 与 ω 回复的轨道集合的闭包).

29. 证明, 若微分同胚或向量场有有限多个奇点与闭轨, 它们都是双曲的, 那末在这些奇点与闭轨之间, 沿着它们的稳定与不稳定流形的匀断交集, 系流是无环的.

30. 证明结构稳定微分同胚或向量场若它的极限集由有限条轨道组成的, 那末, 它必是 Morse-Smale 的.

31. 证明 Anosov 微分同胚的集合与 Morse-Smale 微分同胚的集合是不相交的.

32. 证明允许存在 Anosov 微分同胚的二维紧流形只有环面.

33. 证明这一章命题 4.1 的 Anosov 微分同胚有一条轨道在 T^2 中稠.

34. 给出环面 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$ 上 Anosov 微分同胚的例子.

35. 利用一般稠密性定理证明 Anosov 微分同胚满足公理 A.

36. 证明任何二维流形上存在微分同胚满足公理 A、匀断条件以及具有无穷多个周期点.

提示: 应用 S^2 上 Smale 马蹄与 M^2 上的 Morse-Smale 微分同胚.

37. 证明, 若 $f_1: M_1\to M_1$ 与 $f_2: M_2\to M_2$ 是满足公理 A 与匀断条件的两个微分同胚, 那末 $f: M_1\times M_2\to M_1\times M_2$, 其中 $f(p,q)=(f_1(p), f_2(q))$, 亦

是满足公理 A 与匀断条件的微分同胚.

38. 设 $f: M\to M$ 是 C^1 稳定，且满足公理 A 的微分同胚. 证明 f 一定满足匀断条件.

39. 证明任何满足公理 A 的微分同胚有吸引的基集.

40. 证明，若(紧)流形 M 的微分同胚 f 满足公理 A，那末 f 的吸引基集中的点的稳定流形之并集在 M 中开与稠的.

41. 证明在任何流形中，存在 C^r $(r\geqslant 1)$ 微分同胚所组成的开集，这些微分同胚合痕于恒同映射且不能嵌入流.

回顾：微分同胚 f 合痕于恒同映射，只要存在联结 f 与恒同映射的微分同胚的连续弧. 一 C^r 微分同胚的流是连续群同态 $\varphi: (\mathbb{R}, +)\to(\mathrm{Diff}^r(M)\circ)$. 我们称 f 嵌入流，只要对某个流 φ，有 $f=\varphi(1)$.

42. 证明亏格不为零的曲面上的两个 C^r $(r\geqslant 1)$ 可交换向量场有一个共同的奇点(E. Lima).

提示：首先证明，在曲面上 C^r 向量场仅能有有限多个非平凡极小集. 对于 $r\geqslant 2$，这可由 Denjoy-Schwartz 定理得到，因为这里仅可能有有限个平凡极小集. 注意，在第一章中，我们对二维球面提出了上述问题. 在高维中对应的问题看来远没有解决.

43. 证明在定向曲面 M^2 中，具有平凡中心的向量场集合包含 $\mathscr{X}^\infty(M^2)$ 中的一开稠子集(P.Sad). 向量场 X 有平凡中心，只要对任意的 $Y\in\mathscr{X}^\infty(M^2)$，使得 $[X, Y]=0$，则对某个 $c\in\mathbf{R}$，有 $Y=cX$. 限制于 Morse-Smale 向量场(或更一般的，公理 A 向量场)同样的结果对于高维中的开稠子集仍然成立. 注意，一对可交换的向量场生成一 $\mathbf{R}^2$ 一作用. 在[12]中考虑了 $\mathbf{R}^k$ 一作用的结构稳定概念.

44. 设 X 是紧流形 M 上的 C^∞ 向量场. 假定 X 有 Morse 函数作为它的首次积分. 证明 X 能用没有闭轨的 Morse-Smale 向量场 C^∞ 逼近.

回顾：$f: M\to\mathbf{R}$ 称为 Morse 函数，只要 f 的一切临界点是非退化的，或等价地，只要 $\mathrm{grad} f$ 的所有奇点是双曲的. f 称为 X 的首次积分是指 f 沿着 X 的轨道是常数.

45. 设 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$，$\Lambda\subset M$ 是 f 的闭的不变集. 假定 M 上存在一 Riemann 度量，及一数 $0<\lambda<1$，对于每一 $x\in\Lambda$，有分解

$$TM_x=E^s_x\oplus E^u_x,$$

使得
$$Df_x(E^s_x)=E^s_{f(x)},\ Df_x(E^u_x)=E^u_{f(x)},$$

且对一切 $v\in E^s_x$，有

$$\|Df_x v\|\leqslant\lambda\|v\|$$

以及对一切 $\omega\in E^u_{f(x)}$ 有

$$\|Df_x^{-1}\omega\|\leqslant\lambda\|\omega\|,$$

证明 A 是双曲的,即 TM_x 的子空间 E^s_x 与 E^u_x 随 x 连续变化.

46. 对一切 $n\geqslant 2$, 存在微分同胚 $f: S^n\to S^n$, 满足公理 A 与匀断条件, 它的非游荡集包含一个排斥不动点和一个非周期的吸引子.

提示: 利用第四章第四节的例 6.

47. 证明练习 46 中的结论对一切维数 $n\geqslant 2$ 的流形仍成立.

48. 证明 S^2 上的稳定微分同胚的集合在 $\mathrm{Diff}^1(S^2)$ 中不稠.

提示: 利用练习 38 与修改第 4 节的例 6.

49. 证明对于任何维数 $\geqslant 2$ 的流形, 稳定微分同胚的集合在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中不稠.

附录: 旋转数与 Cherry 流

我们现在来详细讨论这一章例 13 中提到的 Cherry 流的构造. 首先, 我们要证明存在环面上 C^∞ 向量场, 它与圆 Σ 匀断相交, 恰有两个奇点: 一个渊点, 一个鞍点, 都是双曲的. 这样一个向量场的 Poincaré 映射定义在 Σ 中闭区间的余集上, 并可扩张成 Σ 的度为 1 的单调自同态. 旋转数的概念是由 Poincaré 研究圆上同胚的动力学引进的, 现可扩张到这样的自同态上, 我们将证明这些向量场有非平凡的回复轨道当且仅当在 Σ 上所导出的自同态的旋转数是无理数. 因旋转数是与自同态一起连续变化的, 故存在具有非平凡回复轨道的向量场.

设 $\pi: \mathbb{R}^2\to T^2$ 是第一章第一节例 2 中导出的覆盖映射, 于是 π 是 C^∞ 的局部微分同胚,

$$\pi(x,y)=\pi(x',y')$$

当且仅当 $\quad x-x'\in\mathbb{Z}\quad$ 与 $\quad y-y'\in\mathbb{Z}$

以及 $\quad \pi([0,1]\times[0,1])=T^2.$

若 X 是环面上 C^∞ 向量场, 我们由

$$Y(z)=(d\pi_z)^{-1}X(\pi(z))$$

能在 $\mathbb{R}^2$ 上定义 C^∞ 向量场 $Y=\pi^*X$. 显然, 这样定义的向量场 Y

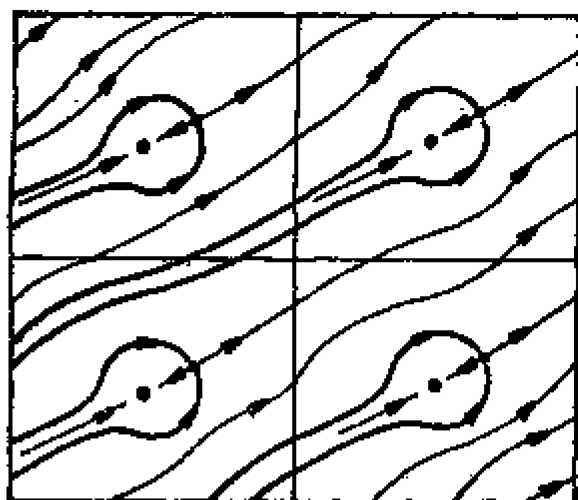


图 61

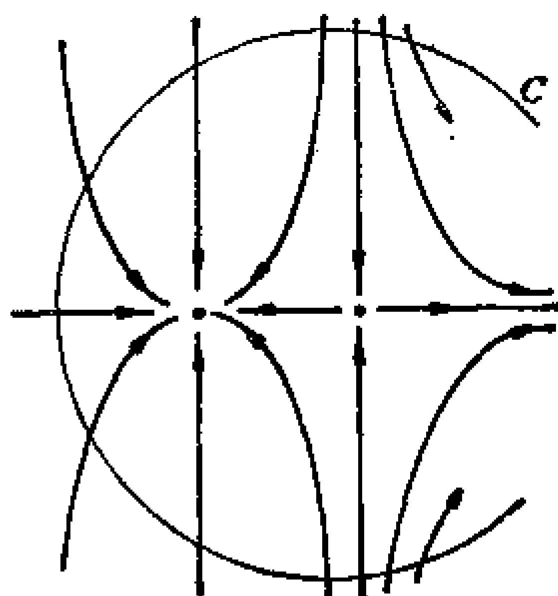


图 62

满足条件

$$Y(x+n,\ y+m)=Y(x,\ y),\ \forall(x,\ y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(n,\ m)\in\mathbb{Z}^2(*)$$

反之，若 Y 是满足条件$(*)$的平面上 C^∞ 向量场．则在环面上存在唯一 C^∞ 向量场 X，使 $Y=\pi^*X$．因此，我们能把环面上的向量场与 $\mathbb{R}^2$ 上满足条件$(*)$的向量场恒同．

设 $\mathscr{C}$ 是所有满足如下条件的向量场 $X\in\mathscr{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的集合：

（i） $X(x+n,\ y+m)=X(x,\ y)$； $\forall(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$，$(m,\ n)\in\mathbb{Z}^2$；

（ii） X 与直线 $\{0\}\times\mathbb{R}$ 匀断相交，且它在正方形 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$中仅有两个奇点 p，s，其中 p 是渊点，s 是鞍点，它们都是双曲的；

（iii） 存在 a，$b\in\mathbb{R}^2$，其中 $a<b<a+1$，使得若 $y\in(b,\ a+1)$，则过点 $(0,\ y)$ 的 X 的正轨道与直线 $\{1\}\times\mathbb{R}$ 交于点 $(1,\ f_x(y))$．而当 $y\in(a,\ b)$时，过$(0,\ y)$ 的正轨道不切割 $\{1\}\times\mathbb{R}$ 而直接趋向于渊点．

（iv）
$$\lim_{y\to b}f'_x(y)=+\infty$$
且
$$\lim_{y\to a+1}f'_x(y)=+\infty.$$

在图 61 中，我们画了向量场 $X\in\mathscr{C}$ 的轨道的示意图，注意，由条件(iii)可得点$(0,\ a)$与$(0,\ b)$的 ω-极限是一个且是同一个鞍

点．若$(1, c)$表示这个鞍点的不稳定流形与直线$\{1\}\times\mathbb{R}$的交点．我们通过定义

$f_X(y)=c$，当$y\in[a, b]$时，能连续扩张f_X到区间$[a, a+1]$．由条件(i)推出

$$f_X(a+1)=f_X(a)+1.$$

所以，我们通过定义

$f_X(y+n)=f_X(y)+n$，当$y\in[a, a+1]$，$n\in\mathbb{Z}$时能连续扩张f_X到$\mathbb{R}$．

我们用$\overline{X}$表示由$X\in\mathscr{C}$导出的环面上的向量场，即$X=\pi^*\overline{X}$．则$\overline{X}$恰有两个奇点，都是双曲的；$\pi(p)$是渊点，$\pi(s)$是鞍点．而且$\overline{X}$是与圆$\Sigma=\pi(\{0\}\times\mathbb{R})$匀断相交，定义在$\pi(\{0\}\times(b, a+1))$上的 Poincaré 映射$P_X$能连续扩张到$\Sigma$．映射$f_X$是$P_X$的一个提升．事实上由$\tilde{\pi}(y)=\pi(0, y)$定义的$\tilde{\pi}$: $\mathbb{R}\to\Sigma$是覆盖映射，且$\tilde{\pi}\circ f_X=P_X\circ\tilde{\pi}$．

引理 1．$\mathscr{C}$是非空的．

证明．考虑向量场

$$Y(x, y)=\left(2x\left(x+\frac{2}{3}\right), -y\right).$$

则Y的非游荡集由两个奇点组成，一个鞍点$(0, 0)$，一个渊点$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$，易验证$Y$与单位圆在弧

$$C=\left\{(x, y), x^2+y^2=1, x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

的一切点匀断相交．见图 62，设

$$Z(x, y)=\left(\varphi(x, y)\left(2x^2+\frac{4}{3}x\right)+(1-\varphi(x, y))(x^2+1), -y\right),$$

其中φ是C^∞函数，使得$\varphi(\mathbb{R}^2)\subset[0, 1]$，当$x>\frac{1}{2}$或$(x, y)\in U$时，$\varphi(x, y)=1$，当$x<\frac{1}{4}$且$(x, y)\in\mathbb{R}^2-V$时，$\varphi(x, y)=0$．此处$U$与$V$是$C$的小邻域且$\overline{U}\subset V$．若$V$充分小，则$Z$的非游荡

集是空的．取 $T>0$，使得，对一切 $t\geqslant T$，有

$$Z_t(C)\subset\{(x,\ y);\ x>1\}.$$

利用 Z 的流，我们可以定义微分同胚 H：$(0,\ 1)\times(0,\ 1)\to W\subset\mathbb{R}^2$：

$$H(x,\ y)=Z_{xT}(h(y)),$$

其中 h：$[0,\ 1]\to C$ 是一微分同胚．若 $z\in(0,\ 1)\times(0,\ 1)$ 我们定义

$$X(z)=dH^{-1}(H(z))\cdot Y(H(z)).$$

因为在 C 的邻域和 $\left\{(x,\ y),\ x>\dfrac{1}{2}\right\}$ 中，$Z=Y$，所以当 z 属于正方形 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 的边界的小邻域时，我们有 $X(z)=(1,\ 0)$．现在能把 X 扩充到 $\mathbb{R}^2$ 上：当 z 属于 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 的边界时，定义 $X(z)=(1,\ 0)$，当 $(x,\ y)\in[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 与 $(n,\ m)\in\mathbb{Z}^2$，定义 $X(x+n,\ y+m)=X(x,\ y)$．容易验证 X 满足条件 (i)—(iii)，条件(iv)由 $dX(s)$ 的迹是正的得到，读者能证实这个事实．我们能假定 X 是在 s 的小邻域中是线性的，虽然这不是必要的．）□

引理 2．对一切 $y\in(b,\ a+1)$，存在向量场 $X\in\mathscr{C}$，使得 $df_X(y)>1$.

证明．取 $Y\in\mathscr{C}$，使得当 $\dfrac{2}{3}\leqslant x<1$ 时，$Y(x,\ y)=(1,\ 0)$．因为 f_Y 把区间 $(b,\ a+1)$ 微分同胚地映上长度为 1 的区间，又根据条件(iv)，在 b 与 $a+1$ 附近 $f'_Y(y)>1$．所以存在微分同胚 f，$(b,\ a+1)\to(f_Y(b),\ f_Y(a+1))$ 使得 $f'(y)>1$，$\forall y\in(b,\ a+1)$ 且若 y 邻近于 b 或 $a+1$，则有 $f(y)=f_Y(y)$．剩下来要证满足 $f_X=f$ 的向量场 $X\in\mathscr{C}$ 的存在性．

设 φ_t：$(c,\ c+1)\to(c,\ c+1)$ 是由

$$\varphi_t(y)=(1-t)y+\varphi(y)$$

定义，其中

$$\varphi=f\circ f_Y^{-1},\ c=f_Y(a)$$

对于每一 $t\in[0,\ 1]$，φ_t 是微分同胚，当 y 邻近于 c 或 $c+1$ 时，$\varphi_t(y)=y$．设 α：$\left[\dfrac{2}{3},\ 1\right]\to[0,\ 1]$ 是 C^∞ 函数，使得在 $\dfrac{2}{3}$ 的邻域

中 $\alpha=0$，在 1 的邻域中 $\alpha=1$. 考虑映射 $H:\left(\frac{2}{3},1\right)\times(c,c+1)\to\left(\frac{2}{3},1\right)\times(c,c+1)$：

$$H(x,y)=(x,\varphi_{\alpha(x)}(y)).$$

于是 H 是微分同胚. 设 X 是如下定义的向量场：当 $(x,y)\in\left(\frac{2}{3},1\right)\times(c,c+1)$ 时

$$X(x,y)=dH(H^{-1}(x,y))\cdot Y(H^{-1}(x,y)),$$

当 $(x,y)\in\left(\frac{2}{3},1\right)\times(c,c+1)$，$(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ 时

$$X(x+n,y+m)=X(x,y),$$

当 $((x,y)+\mathbb{Z}^2)\cap\left(\frac{2}{3},1\right)\times(c,c+1)=\varnothing$ 时

$$X(x,y)=Y(x,y).$$

易验证，$X\in\mathscr{C}$，且 $f_X=\varphi\circ f_Y=f$. □

引理 3. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单调连续函数，使得对一切 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(x+1)=f(x)+1$，$g(x+1)=g(x)+1$. 则

(i) $\rho(f)=\lim\limits_{n\to\infty}(f^n(0)/n)$ 存在，且

$$|(f^n(0)/n)-\rho(f)|<\frac{1}{n};$$

(ii) 对一切 $x\in\mathbb{R}$，

$$\lim_{n\to-\infty}(f^n(x)-x)/n$$

存在且等于 $\rho(f)$；

(iii) $\rho(f)=m/n$，其中 $m,n\in\mathbb{Z}$，$n>0$ 当且仅当存在 $x\in\mathbb{R}$，使得 $f^n(x)=x+m$；

(iv) 给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若

$$\|f-g\|_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|<\delta$$

那末

$$|\rho(f)-\rho(g)|<\varepsilon;$$

(v) 对一切整数 n，有

$$\rho(f+n)=\rho(f)+n,$$

证明. 设

$$M_k=\max_{x\in\mathbb{R}}(f^k(x)-x)$$

$$m_k=\min_{x\in\mathbb{R}}(f^k(x)-x)$$

我们断言: $M_k-m_k<1$. 事实上, 因为 $f(x+1)=f(x)+1$, 所以有 $f^k(x+1)=f^k(x)+1$. 因此 $\varphi=f^k-id$ 是周期为 1 的周期函数. 于是存在 x_k, $Z_k\in\mathbb{R}$, $0\leqslant x_k-X_k<1$, 使得 $\varphi(x_k)=m_k$ 以及 $\varphi(Z_k)=M_k$. 因为 f^k 亦是单调不减的, 所以有 $f^k(X_k)\leqslant f^k(x_k)$. 于是 $M_k+X_k\leqslant m_k+x_k$, $M_k-m_k\leqslant x_k-X_k<1$. 这就证明了断言.

我们来证明

$$f^k(y)-y-1\leqslant f^k(x)-x\leqslant f^k(y)-y+1,\ \forall(x,\ y)\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

事实上,

$$\begin{aligned} f^k(y)-y-1&\leqslant M_k-1\leqslant m_k \\ &\leqslant f^k(x)-x\leqslant M_k \\ &\leqslant m_k+1\leqslant f^k(y)-y+1. \end{aligned}$$

其次, 我们在 (1) 中令 $y=0$, $x=f^{k(j-1)}(0)$, 得到

$$f^k(0)-1\leqslant f^{kj}(0)-f^{k(j-1)}(0)\leqslant f^k(0)+1.$$

于是

$$\begin{aligned} n(f^k(0)-1)&=\sum_{j=1}^{n}(f^k(0)-1) \\ &\leqslant\sum_{j=1}^{n}(f^{kj}(0)-f^{k(j-1)}(0)) \\ &\leqslant n(f^k(0)+1). \end{aligned}$$

由此, 我们推出

$$nf^k(0)-n\leqslant f^{kn}(0)\leqslant nf^k(0)+n$$

用 kn 除上式得

$$\frac{f^k(0)}{k}-\frac{1}{k}\leqslant\frac{f^{kn}(0)}{kn}\leqslant\frac{f^k(0)}{k}+\frac{1}{k}$$

或

$$\left|\frac{f^{kn}(0)}{kn}-\frac{f^k(0)}{k}\right|\leqslant\frac{1}{k}. \quad (2)$$

类似地

$$\left|\frac{f^{kn}(0)}{kn}-\frac{f^n(0)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

因为

$$\left|\frac{f^k(0)}{k}-\frac{f^n(0)}{n}\right|\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{n},$$

故序列 $\dfrac{f^k(0)}{k}$ 是 Cauchy 序列．于是，它收敛到某个极限 $\rho(f)$．在(2)中令 n 趋于 ∞，我们有

$$\left|\rho(f)-\frac{f^k(0)}{k}\right|\leqslant\frac{1}{k}.$$

这就证明了(i)．

在(1)中令 $y=0$，我们得到

$$f^k(0)-1\leqslant f^k(x)-x\leqslant f^k(0)+1.$$

于是
$$\frac{f^k(0)}{k}-\frac{1}{k}\leqslant\frac{f^k(x)-x}{k}\leqslant\frac{f^k(0)}{k}+\frac{1}{k}.$$

这表明 $(f^k(x)-x)/K$ 收敛于 $\rho(f)$．故(ii)得证．

为了证明(iii)．假定存在 $x\in\mathbb{R}$，使得

$$f^n(x)=x+m,\text{其中 } m,\ n\in\mathbb{Z},\ n>0,$$

利用归纳法，易推出

$$f^{kn}(x)=x+km.$$

于是
$$\rho(f)=\lim_{k\to\infty}(f^{kn}(x)-x)/kn=\lim_{k\to\infty}km/kn=m/n.$$

现设 $\rho(f)=m/n$，若可能的话，假定 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f^n(x)\neq x+m$，那末有 $f^n(x)-x>m$（或 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $f^n(x)-x<m$），$\forall x\in\mathbb{R}$．因为 f^n-id 是周期的，所以存在 $a>0$，使得

$$f^n(x)-x\geqslant m+a\ (\text{或 } f^n(x)-x\leqslant m-a),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

于是
$$f^{kn}(x)-x\geqslant km+ka\ (\text{或 } f^{kn}(x)-x\leqslant km-ka)$$

故
$$\rho(f)\geqslant(m+a)/n\ (\text{或 } \rho(f)\leqslant(m-a)/n)$$

这样就得出矛盾．

为了证明(iv)，我们注意到：

$$\begin{aligned}|\rho(f)-\rho(g)|&\leqslant\left|\rho(g)-\frac{g^k(0)}{k}\right|+\left|\frac{g^k(0)}{k}-\frac{f^k(0)}{k}\right|\\&\quad+\left|\frac{f^k(0)}{k}-\rho(f)\right|\\&\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{k}|g^k(0)-f^k(0)|+\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

固定一整数 k，使得 $2/k<\varepsilon/2$，且选择 $\delta>0$，使得当 $\|g-f\|_0<\delta$

时，有

$$|g^k(0)-f^k(0)|<k\varepsilon/2.$$

于是，当 $\|g-f\|_0<\delta$ 时，有

$$|\rho(g)-\rho(f)|<\varepsilon.$$

剩下来要证，当 $n\in\mathbb{Z}$ 时，$\rho(f+n)=\rho(f)+n$，借助于归纳法，我们有

$$(f+n)^k(x)=f^k(x)+kn.$$

于是
$$\rho(f+n)=\lim_{k\to\infty}\frac{(f+n)^k(0)}{k}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{f^k(0)+kn}{k}=\rho(f)+n. \qquad \square$$

引理 3 允许我们去引进关于圆的度数为 1 的单调自同态的旋转数．事实上，设 π: $\mathbb{R}\to S^1$ 是由 $\pi(t)=\exp(2\pi it)$ 定义的覆盖映射．同态 α: $S^1\to S^1$ 是单调的且度数为 1 当且仅当它有提升 $\tilde{\alpha}$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，是连续单调函数且满足 $\tilde{\alpha}(x+1)=\tilde{\alpha}(x)+1$．于是，我们定义 α 的旋转数为 $\rho(\alpha)=\pi\rho(\tilde{\alpha})$．由引理 3(v)，它不依赖于提升 $\tilde{\alpha}$ 的选择．

引理 4． 存在 $X\in\mathscr{C}$，使得对一切 $y\in(b,\ a+1)$ 有 $df_X(y)>1$，且 $\rho(f_X)$ 是无理数．

证明． 选择 $X^0\in\mathscr{C}$，使得对一切 $y\in(b,\ a+1)$ 有 $df_{X^0}(y)>1$，且当 $\frac{2}{3}<x<1$ 时，有 $X^0(x,\ y)=(1,\ 0)$．我们将构造一族向量场 $X^\lambda\in\mathscr{C}$，使得

$$f_{X^\lambda}=f_{X^0}+\lambda.$$

设 H: $\left(\frac{2}{3},1\right)\times\mathbb{R}\to\left(\frac{2}{3},\ 1\right)\times\mathbb{R}$ 由

$$H(x,\ y)=(x,\ y+\alpha(x)\lambda)$$

给出的，其中 α: $\left[\frac{2}{3},1\right]\to[0,\ 1]$ 是 C^∞ 函数，使得若 x 邻近于 $\frac{2}{3}$，有 $\alpha(x)=0$，若 x 邻近于 1 有 $\alpha(x)=1$，我们定义

$$X^\lambda(x,\ y)=dH(H^{-1}(x,\ y))\cdot X^0(H^{-1}(x,\ y)),$$
$$\text{若 }(x,\ y)\in(\tfrac{2}{3},\ 1)\times\mathbb{R};$$

$$X^\lambda(x+n,\ y)=X^\lambda(x,\ y),\quad 若\ x\in\left(\frac{2}{3},\ 1\right);$$

$$X^\lambda(x,\ y)=X^0(x,\ y),\ 若\ (x+\mathbb{Z})\cap\left(\frac{2}{3},\ 1\right)=\varnothing.$$

对一切 $m\in\mathbb{Z}$,有

$$H(x,\ y+m)=H(x,\ y)+(0,\ m),$$

故 $X^\lambda\in\mathscr{C}$. 由此,立即得出

$$f_{X^\lambda}=f_{X^0}+\lambda.$$

考虑映射 h: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(\lambda)=\rho(f_{X^\lambda})$ 由引理 3, h 连续, 且 $h(1)=h(0)+1$. 于是存在 $\bar{\lambda}\in[0,\ 1]$,使得 $h(\bar{\lambda})$ 是无理数,故取 $X=X^{\bar{\lambda}}$ 即可. □

定理. 在环面上存在 C^∞ 向量场 Y,具有如下轨道结构:

(1) Y 恰有两个奇点, 一个渊点 P 和一个鞍点 S, 它们都是双曲的.

(2) $W^s(P)$ 在 T^2 上稠密且紧集 $\Lambda=T^2-W^s(P)$ 是传递的,即存在 $q\in\Lambda-\{S\}$,具有 $\omega(q)=\alpha(q)=\Lambda$.

(3) 若 $q\in T^2-(\Lambda\cup\{P\})$,那末 $\omega(q)=P$,且 $\alpha(q)\subset\Lambda$;

(4) 存在与 Y 匀断相交的圆 Σ, 使得 $\Sigma\cap\Lambda$ 是 Cantor 集.

证明. 取 $Y\in\mathscr{X}^\infty(T^2)$,使得 $\pi^*Y=X$ 满足引理 4 的条件. 显然 Y 满足(1),且有 $P=\pi(p)$,$S=\pi(s)$. 圆 $\Sigma=\pi(\{0\}\times\mathbb{R})$ 与 Y 匀断相交, 且 f_X 是 Poincaré 映射 P_Y: $\Sigma\to\Sigma$ 的提升. 若 Q 是 S 的不稳定流形与 Σ 的第一个交点, 那末 $Q=\pi(1,\ c)$, $P_Y^{-1}Q=\pi(\{0\}\times[a,\ b])$. 若 $\omega(Q)=S$ 或 $\omega(Q)=P$ 则存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $P_Y^nQ=Q$. 于是

$$\tilde{\pi}f_X^n(c)=P_Y^n\tilde{\pi}(c)=P_Y^n(Q)=Q=\tilde{\pi}(c),$$

所以存在 $m\in\mathbb{Z}$,使得 $f_X^n(c)=c+m$,这与 $\rho(f_X)$ 是无理数的事实矛盾, 于是 Y 没有鞍点联结且 $\Lambda=\omega(Q)$ 不包含 P. 类似地可证 Y 没有闭轨.

现在来证 $W^s(P)$ 在 T^2 中稠. 为此只要证明紧集 $K=\Sigma-$

$W^s(P)$ 内部是空的. 若不然, 设 K 的内部是非空的, 取它的最大区间为 $J\subset K$. 设 $J_n=P_Y^n(J)=P_Y(J_{n-1})$. 因为 $J\cap W^s(P)=\varnothing$, 故 J_n 是比 J_{n-1} 长的紧区间. 由于 J 是最大区间, 而 Y 没有闭轨, 所以区间 J_n 是两两不相交的. 这个矛盾证明了 $W^s(P)$ 是稠的.

根据 Denjoy-Schwartz 定理, Y 仅有平凡的极小集. 我们来直接验证这个事实. 假定 L 是关于 Y 的非平凡的极小集, 那末 $L\cap\Sigma$ 是与鞍点 S 的稳定与不稳定流形皆不相交的紧集, 否则 L 将包含鞍点. 因为 $W^s(P)$ 是稠的且 $L\cap W^s(P)=\varnothing$, 所以 $W^s(S)$ 在 L 中稠. 于是若 J 是 $\Sigma-L$ 中的最大区间, 则对于某个 n, 有 $P_Y^n(J)\cap J\neq\varnothing$. 因为 J 的端点属于 L, 所以 $P_Y^n(J)=J$, 由此推出存在闭轨. 这个矛盾证明了 P 与 S 是 Y 仅有的极小集.

区间 $I_n=P_Y^{-n}(Q)$ 是两两不相交的, 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{int}(\mathrm{In})=W^s(P)\cap\Sigma$$

在 Σ 中稠密. 区间 I_n 的端点属于 $W^s(S)-\{S\}$ 的不同的连通分支. 于是, $W_+^s(S)$ 和 $W_-^s(S)$ 皆在 $\Sigma-W^s(P)$ 中稠, 这里 $W_+^s(S)$ 与 $W_-^s(S)$ 表示 $W^s(S)-\{S\}$ 的分支. 由此 $W_+^s(S)$ 与 $W_-^s(S)$ 都在 $\Lambda=T^2-W^s(P)$ 中稠密, 所以 $W^s(S)-\{S\}$ 中任一点的 α-极限集是 Λ. 设 $q\in T^2-(\Lambda\cup P)$, 因为 $\alpha(q)$ 是紧不变集, 且 Y 的极小集是 S 与 P, 故 $\alpha(q)$ 包含 S. 于是, 要么 $\alpha(q)=S$, 要么 $\alpha(q)$ 包含 S 的稳定流形的某个点, 在这种情况下, $\alpha(q)=\Lambda$. 易见 $\Lambda\cap\Sigma$ 是内部为空的空全集, 因而 $\Lambda\cap\Sigma$ 是 Cantor 集. 最后, 因为 $W^s(S)\cup W^u(S)\cap\Sigma$ 是可数的, $\Lambda\cap\Sigma$ 是不可数的, 故存在 $q\in\Sigma-(W^s(S)\cup W^u(S))$. 而因 $\alpha(q)=\omega(q)=\Lambda$. □

注 虽然在这个定理中向量场不是结构稳定的, 但我们能够完整地描述在 Y 的小邻域 $\mathcal{N}$ 中一切向量场的拓扑等价类. 事实上, 若 $Z\in\mathcal{N}$ 且 $\mathcal{N}$ 充分小, 则圆 Σ 仍与 Z 匀断相交, Poincaré 映射 P_Z 在它的定义域中一切点有大于1的导数. 由此, 若 $Z\in\mathcal{N}$ 是 Morse-Smale 的, 那末 Z 仅有一个闭轨, 且它是

排斥子($\mathcal{N}$ 中确实存在 Morse-Smale 向量场，因为它们在 $\mathfrak{X}^\infty(T^2)$ 中稠). 若 Z 不是 Morse-Smale 的，则存在两种可能：要么 Z 有鞍点联结，是排斥子，Z 的非游荡集减少为这个鞍点联结与这个渊点，要么由 Z 导出的 Σ 的自同态的旋转数是无理数，且在这种情况下，Z 满足定理的条件(1)到(4)；可证：若由邻近于 Y 的两个向量场 Z_1 与 Z_2 导出的自同态有相同的旋转数，且为无理数，那末 Z_1 与 Z_2 是拓扑等价的. 已有的部分结果是：若在 Z_1 与 Z_2 之间存在邻近于恒同的拓扑等价 h，且 Z_1 的旋转数是无理数，则 Z_2 与 Z_1 的旋转数相等. 这里实际上仅要求 h 与恒同映射同伦即可. 于是，在 Y 的一个邻域中. 我们恰有一类结构稳定向量场的等价类，一类具有鞍点联结的等价类以及无限多类有非平凡回复轨道的向量场的等价类. 后者由简单实参数，即在 Σ 上导出的自同态的旋转数来表征.

我们要特别强调，在环面上无奇点且具有非平凡回复轨道的向量场的邻域中完整地描述拓扑等价类是不可能的. 事实上，若 Y 是如此的向量场，则存在与 Y 匀断相交的圆 Σ, Poincaré 映射 P_Y 定义在整个圆 Σ 上，根据 Herman 的一个重要定理[37]，我们能用 C^∞ 等价于无理流的向量场 X 去逼近 Y，那末我们能用一切轨道是闭的向量场去逼近 X. 由此在 Y 的任意邻域中存在 Morse-Smale 向量场，它的闭轨个数是无界的. 因而，在 Y 的任意的邻域中，存在无限多个结构稳定向量场的拓扑等价类.

参 考 文 献

[1] R. ABRAHAM and J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, rev. ed. Benjamin-Cummings, 1978.

[2] R. ABRAHAM and S. SMALE, Nongenericity of Ω-stability. In: *Global Analysis*. Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc., 1970.

[3] D. V. ANOSOV, *Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature*, Proc. Steklov Math. Inst., vol. 90, 1967. American Math. Soc., 1969 (Transl.).

[4] V. ARNOLD, *Equations Différentielles Ordinaires*. Editions Mir., 1974.

[5] V. ARNOLD, *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*. Éditions Mir, 1980.

[6] V. ARNOLD, Lectures on bifurcations and versal families, *Russian Math. Surveys*, 27, 1972.

[7] V. ARNOLD and A. AVEZ, *Théorie Ergodique des Systèmes Dynamiques.* Gauthier-Villars, 1967.
[8] D. ASIMOV, Round handles and nonsingular Morse–Smale flows, *Ann. of Math.*, **102**, 1975.
[9] R. BOWEN, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 470. Springer-Verlag, 1975.
[10] R. BOWEN, *On Axiom A Diffeomorphisms*, Conference Board Math. Sciences, 35, American Math. Soc., 1977.
[11] P. BRUNOVSKY, On one-parameter families of diffeomorphisms II: generic branching in higher dimensions. *Comm. Math. Univers. Carolinae*, **12**, 1971.
[12] C. CAMACHO, On $R^k \times Z^l$-actions. In: *Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto. Academic Press, 1973.
[13] T. CHERRY, Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus, *Proc. London Math. Soc.*, **44**, 1938.
[14] C. CONLEY, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, Conference Board Math. Sciences, 38. American Math. Soc., 1980.
[15] A. DANKNER, On Smale's Axiom A diffeomorphisms, *Ann. of Math.*, **107**, 1978.
[16] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pure et Appl.*, **11**, ser. 9, 1932.
[17] J. DUISTERMAAT, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **27**, 1974.

[18] F. FARRELL and L. JONES, Anosov diffeomorphisms constructed from π_1 Diff(S^n), *Topology*, **17**, 1978.
[19] G. FLEITAS, Classification of gradient like flows on dimensions two and three, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **6**, 1975.
[20] J. FRANKS, Anosov diffeomorphisms, In: *Global Analysis.* Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc., 1970.
[21] J. FRANKS, Differentiably Ω-stable diffeomorphisms, *Topology*, **11**, 1972.
[22] J. FRANKS and C. NARASIMHAN, The periodic behavior of Morse–Smale diffeomorphisms, *Invent. Math.*, **48**, 1978.
[23] J. FRANKS and M. SHUB, The existence of Morse–Smale diffeomorphisms, *Topology*, **20**, 1981.
[24] J. FRANKS and R. WILLIAMS, Anomalous Anosov flows. In: *Global Theory of Dynamical Systems*, edited by Z. Nitecki and C. Robinson. Lecture Notes in Mathematics, vol. 819. Springer-Verlag, 1980.
[25] D. GROBMAN, Homeomorphisms of systems of differential equations, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **128**, 1959.
[26] J. GUCKENHEIMER, Absolutely Ω-stable diffeomorphisms, *Topology*, **11**, 1972.
[27] J. GUCKENHEIMER, Bifurcations of dynamical systems. In: *Dynamical Systems.* CIME Lectures-Bressanone (Italy), Birkhäuser, 1980.
[28] M. GOLUBITSKY and V. GUILLEMIN, *Stable Mappings and Their Singularities.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 14. Springer-Verlag, 1974.
[29] V. GUILLEMIN and A. POLLACK, *Differential Topology.* Prentice-Hall, 1974.
[30] C. GUTIERREZ, Structural stability for flows on the torus with a cross-cap, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **241**, 1978.
[31] C. GUTIERREZ, Smoothing continuous flows and the converse of Denjoy–Schwartz theorem, *Anais Acad. Brasil. Ciências*, 51, 1979.
[32] C. GUTIERREZ and W. MELO, On the connected components of Morse–Smale vector fields on two manifolds, *Proc. IIIrd Latin American School of Mathematics*, edited by J. Palis and M. do Carmo. Lecture Notes in Mathematics, vol. 597. Springer-Verlag, 1977.
[33] J. HALE, *Ordinary Differential Equations*, rev. ed. Robert E. Krieger Publ. Co.,

1980.
[34] J. HALE, *Topics in Dynamic Bifurcation*. Conference Board Math. Sciences, American Math. Soc., 1981.
[35] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*. Wiley, 1964.
[36] P. HARTMAN, A lemma in the theory of structural stability of differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11, 1960.
[37] M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques*, 49, 1979.
[38] M. HIRSCH, *Differential Topology*. Graduate texts in Mathematics, vol. 33. Springer-Verlag, 1976.
[39] M. HIRSCH and C. PUGH, Stable manifolds and hyperbolic sets. In: *Global Analysis*, Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc., 1970.
[40] M. HIRSCH, C. PUGH, and M. SHUB, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, Springer-Verlag, 1977.
[41] M. HIRSCH and S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
[42] G. IOOSS and D. JOSEPH, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
[43] M. IRWIN, On the stable manifold theorem, *Bull. London Math. Soc.*, 2, 1970.
[44] I. KUPKA, Contribution à la théorie des champs génériques, *Contrib. Diff. Equations*, 2, 1963.
[45] M. KEANE, Interval exchange transformations, *Math. Z.*, 141, 1975.
[46] S. LANG, *Analysis*, vol. I. Addison-Wesley, 1968.
[47] S. LEFSCHETZ, *Differential Equations: Geometric Theory*. Wiley, 1963.
[48] E. LIMA, *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$. Univ. Brasilia and Edgard Blücher, 1970.
[49] E. LIMA, Variedades diferenciáveis, *Monogr. de Mat.*, 15, IMPA, 1973.
[50] I. MALTA, Hyperbolic Birkhoff centers, *Anais Acad. Brasil. Ciências*, 51, 1979; and *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262, 1980.
[51] I. MALTA, On Ω-stability of flows, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 11, 1980.
[52] R. MAÑÉ, Absolute and infinitesimal stability. In: *Dynamical Systems Warwick* 1974, edited by A. Manning. Lecture Notes in Mathematics, vol. 468. Springer-Verlag, 1975.
[53] R. MAÑÉ, Contributions to the stability conjecture, *Topology*, 17, 1978.
[54] R. MAÑÉ, An ergodic closing lemma. Preprint IMPA, 1980; to appear in *Ann. of Math.*
[55] A. MANNING, There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *Amer. J. Math.*, 96, 1974.
[56] N. MARKLEY, The Poincaré–Bendixson theorem for the Klein bottle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135, 1969.
[57] L. MARKUS, *Lectures in Differentiable Dynamics*; rev. ed. Conference Board Math. Sciences, 3. American Math. Soc., 1980.
[58] J. MARSDEN and M. McCRACKEN, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Appl. Math. Sciences, vol. 19. Springer-Verlag, 1976.
[59] W. MASSEY, *Algebraic topology: an Introduction*. Harcourt-Brace-World, 1967.
[60] J. MORGAN, Nonsingular Morse–Smale flows on three-manifolds, *Topology*, 18, 1979.
[61] W. MELO, Structural stability of diffeomorphisms on two manifolds, *Invent. Math.*, 21, 1973.
[62] W. MELO and J. PALIS, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 1977.
[63] P. MENDES, On stability of dynamical systems on open manifolds, *J. Diff. Equations*, 16, 1974.
[64] J. MILNOR, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia,

1965.

[65] J. MOSER, On a theorem of Anosov, *J. Diff. Equations*, **5**, 1969.

[66] J. MOSER, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems with Special Emphasis on Celestial Mechanics*. Princeton Univ. Press, 1973.

[67] S. NEWHOUSE, On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92**, 1970.

[68] S. NEWHOUSE, Nondensity of Axiom A(a) on S^2 In: *Global Analysis*, Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc. 1970.

[69] S. NEWHOUSE, Hyperbolic limit sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **167**, 1972.

[70] S. NEWHOUSE, Lectures on dynamical systems. In: *Dynamical Systems*. CIME Lectures-Bressanone (Italy). Birkhäuser, 1980.

[71] S. NEWHOUSE and J. PALIS, Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds. In: *Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto. Academic Press, 1973.

[72] Z. NITECKI, *Differentiable Dynamics*. M.I.T. Press, 1971.

[73] G. PALIS, Linearly induced vector fields and R^2-actions on spheres, *J. Diff. Geometry*, **13** (2), 1978.

[74] J. PALIS, On the local structure of hyperbolic fixed points in Banach spaces, *Anais Acad. Brasil. Ciências*, **40**, 1968.

[75] J. PALIS, On Morse–Smale dynamical systems, *Topology*, **8**, 1969.

[76] J. PALIS, A note on Ω-stability. In: *Global Analysis*, Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc., 1970.

[77] J. PALIS (Editor). Seminário de Sistemas Dinâmicos, *Monogr. de Mat.*, **4**, IMPA, 1971.

[78] J. PALIS, Moduli of stability and bifurcation theory. *Proc. Int. Congress of Mathematicians, Helsinki*, 1978.

[79] J. PALIS and S. SMALE, Structural stability theorems. In: *Global Analysis*. Proc. Symp. in Pure Math. vol. XIV. American Math. Soc., 1970.

[80] J. PALIS and F. TAKENS, Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems, *Topology*, **16**, 1977.

[81] M. PEIXOTO, Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, **1**, 1962.

[82] M. PEIXOTO, On an approximation theorem of Kupka and Smale, *J. Diff. Equations*, **3**, 1967.

[83] M. PEIXOTO, On the classification of flows on two-manifolds. In: *Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto. Academic Press, 1973.

[84] M. PEIXOTO, On bifurcations of dynamical systems. *Proc. Int. Congress of Mathematicians, Vancouver*, 1974.

[85] M. PEIXOTO and M. C. PEIXOTO, Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions, *Anais Acad. Brasil. Ciências*, **31**, 1959.

[86] V. PLISS, Properties of solutions of a periodic system of two differential equations having an integral set of zero measure, *Diff. Equations*, **8**, 1972.

[87] V. PLISS, Sur la grossièreté des équations différentielles définies sur le tore. *Vestnik LGU, ser. mat.* **13**, (3), 1960.

[88] C. PUGH, The closing lemma, *Amer. J. Math.*, **89**, 1967.

[89] C. PUGH, An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math.*, **89**, 1967.

[90] C. PUGH, On a theorem of P. Hartman, *Amer. J. Math.*, **91**, 1969.

[91] C. PUGH and M. SHUB, The Ω-stability theorem for flows, *Invent. Math.*, **11**, 1970.

[92] J. ROBBIN, A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, **94**, 1971.

[93] J. ROBBIN, Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**, 1972.

[94] L. ROCHA, Characterization of Morse–Smale isotopy classes on two-manifolds,

Anais Acad. Brasil. Ciências, 50, 1978.

[95] C. ROBINSON, Structural stability of vector fields, *Ann. of Math.*, 99, 1974.

[96] C. ROBINSON, Structural stability of C^1 flows, In: *Dynamical Systems Warwick* 1974, edited by A. Manning, Lecture Notes in Mathematics, vol. 468. Springer-Verlag, 1975.

[97] C. ROBINSON, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Diff. Equations*, 22, 1976.

[98] C. ROBINSON, C^r structural stability implies Kupka–Smale, In: *Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto. Academic Press, 1973.

[99] D. RUELLE, *Dynamical Systems with Turbulent Behavior*. Lecture Notes in Physics, vol. 80. Springer-Verlag, 1978.

[100] A. SCHWARTZ, A generalization of a Poincaré–Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.*, 85, 1963.

[101] M. SHUB, Stabilité globale des systèmes dynamiques, *Astérisque*, 56, 1978.

[102] M. SHUB, Structurally stable diffeomorphisms are dense, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78, 1972.

[103] M. SHUB and D. SULLIVAN, Homology theory and dynamical systems, *Topology*, 14, 1975.

[104] M. SHUB and R. WILLIAMS, Future stability is not generic, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22, 1969.

[105] C. SIMON, Instability in $\mathrm{Diff}^r(T^3)$ and the nongenericity of rational zeta functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 174, 1972.

[106] S. SMALE, On gradient dynamical systems, *Ann. of Math.*, 74, 1961.

[107] S. SMALE, Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, *Ann. Scuela Sup. Piza*, 17, 1963.

[108] S. SMALE, Diffeomorphisms with many periodic points. In: *Differential and Combinatorial Topology*. Princeton Univ. Press, 1965.

[109] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 1967.

[110] S. SMALE, The Ω-stability theorem. In: *Global Analysis*. Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc. 1970.

[111] S. SMALE, Structurally stable systems are not dense, *Amer. J. Math.*, 88, 1966.

[112] S. SMALE, Stability and isotopy in discrete dynamical systems. In: *Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto. Academic Press, 1973.

[113] S. SMALE, Essays on dynamical systems, economic processes and related topics. *The Mathematics of Time*. Springer-Verlag, 1980.

[114] J. SOTOMAYOR, Generic one parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques*, 43, 1973.

[115] J. SOTOMAYOR, Generic bifurcations of dynamical systems. In: *Dynamical Systems*, edited by M. Peixoto. Academic Press, 1973.

[116] J. SOTOMAYOR, *Lições de equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 1979.

[117] F. TAKENS, *Introduction to Global Analysis*, Comm. no. 2, Math. Inst. Univ. Utrecht, 1973.

[118] R. THOM, *Structural Stability and Morphogenesis*. Benjamin–Addison Wesley, 1975.

[119] C. ZEEMAN, Uma introdução informal à topologia das superfícies, *Monogr. de Mat.*, 20, IMPA, 1975.

[120] P. WALTERS, *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, 1982.

[121] R. WILLIAMS, Expanding attractors, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Scientifiques*, 43, 1973.

[122] R. WILLIAMS, The "DA" maps of Smale and structural stability. In: *Global Analysis*. Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV. American Math. Soc., 1970.

ISBN [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]